

10

Под редакцией
И. В. Ященко

Д. Д. Гущин
А. В. Малышев

ЕГЭ
2019

МАТЕМАТИКА

ЕГЭ 2019

10
Профильный

ЗАДАЧИ
ПРИКЛАДНОГО
СОДЕРЖАНИЯ

РАБОЧАЯ ТЕТРАДЬ

ФГОС

МАТЕМАТИКА

Д. Д. Гущин, А. В. Малышев

ЕГЭ 2019. Математика
Задачи прикладного содержания

Задача 10 (профильный уровень)

Рабочая тетрадь

Под редакцией И. В. Ященко

Издание соответствует Федеральному государственному
образовательному стандарту (ФГОС)

Москва
Издательство МЦНМО
2019

УДК 373:51
ББК 22.1я72
Г98

Г98 **Гущин Д. Д., Малышев А. В.**
ЕГЭ 2019. Математика. Задачи прикладного содержания. Задача 10 (профильный уровень). Рабочая тетрадь / Под ред. И. В. Ященко. — М.: МЦНМО, 2019. — 80 с.

ISBN 978-5-4439-1320-9

Рабочая тетрадь по математике серии «ЕГЭ 2019. Математика» ориентирована на подготовку учащихся старшей школы к успешной сдаче Единого государственного экзамена по математике в 2019 году по базовому и профильному уровням. В рабочей тетради представлены задачи по одной позиции контрольных измерительных материалов ЕГЭ-2019.

На различных этапах обучения пособие поможет обеспечить уровневый подход к организации повторения, осуществить контроль и самоконтроль знаний по основным темам, связанным с решением текстовых задач с прикладным содержанием. Рабочая тетрадь ориентирована на один учебный год, однако при необходимости позволит в кратчайшие сроки восполнить пробелы в знаниях выпускника.

Тетрадь предназначена для учащихся старшей школы, учителей математики, родителей.

Издание соответствует Федеральному государственному образовательному стандарту (ФГОС).

ББК 22.1я72

Приказом № 729 Министерства образования и науки Российской Федерации Московский центр непрерывного математического образования включён в перечень организаций, осуществляющих издание учебных пособий, допущенных к использованию в образовательном процессе.

12+

ISBN 978-5-4439-1320-9

© Гущин Д. Д., Малышев А. В., 2019.
© МЦНМО, 2019.

От редактора серии

Прежде чем вы начнете работать с тетрадями, дадим некоторые пояснения и советы.

Планируется, что в 2019 году у вас будет возможность выбрать уровень экзамена по математике — базовый или профильный. Вариант базового уровня будет состоять из 20 задач, проверяющих освоение Федерального государственного образовательного стандарта на базовом уровне.

Вариант ЕГЭ профильного уровня состоит из двух частей. Первая часть содержит 8 заданий базового уровня сложности по основным темам школьной программы, включая практико-ориентированные задания с кратким ответом. Вторая часть состоит из 11 более сложных заданий по курсу математики средней школы; из них четыре с кратким ответом (задания 9—12) и семь с развернутым ответом (задания 13—19).

Рабочие тетради организованы в соответствии со структурой экзамена и позволяют вам подготовиться к выполнению всех заданий с кратким ответом, выявить и устранить пробелы в своих знаниях.

Профильный уровень предназначен в первую очередь для тех, кому математика требуется при поступлении в вуз. Если вы ориентируетесь на этот уровень, то понимаете, что нужно уметь решать все задания с кратким ответом — ведь на решение такой задачи и вписывание ответа в лист на экзамене уйдет меньше времени, чем на задание с развернутым решением; обидно терять баллы из-за ошибок в относительно простых задачах.

Кроме того, тренировка на простых задачах позволит вам избежать технических ошибок и при решении задач с полным решением.

Работу с тетрадью следует начать с выполнения диагностической работы. Затем рекомендуется прочитать решения задач и сравнить свои решения с решениями, приведёнными в книге. Если какая-то задача или тема вызывает затруднения, следует после повторения материала выполнить тематические тренинги.

Для завершающего контроля готовности к выполнению заданий соответствующей позиции ЕГЭ служат диагностические работы, размещённые в конце тетради.

Работа с серией рабочих тетрадей для подготовки к ЕГЭ по математике позволит выявить и в кратчайшие сроки ликвидировать пробелы в знаниях, но не может заменить систематического изучения математики.

Желаем успеха!

Введение

Не будет преувеличением сказать, что главная цель изучения наук в школе — понять, как устроен мир вокруг нас. Мир — в широком смысле этого слова: окружающая нас живая и неживая природа, общество, социально-экономические отношения, даже внутренний мир человека. Мы хотим понять окружающую нас действительность, а также научиться её моделировать, осознавать её поведение в прошлом, уметь прогнозировать в будущем.

Явления неживой природы обладают рядом особенностей, позволяющих достаточно точно описывать и предсказывать их поведение. Главные из этих особенностей — неизменность физических и химических законов во времени, а также найденные учёными относительно простые функциональные законы, описывающие приближённые модели таких систем. Поэтому одними из самых простых и в то же время наиболее важными естественно-научными задачами являются задачи на анализ функциональных зависимостей.

Язык функций — удобное средство мироописания, особенно распространённое в физике и химии. Аппарат математической статистики, а также комбинаторики и теории вероятностей кроме этих наук используется в биологии, психологии, социологии, экономике и других областях знаний, в которых предполагается анализ наблюдений, опытных данных, результатов измерений, тестов, опросов и пр.

Задания с прикладным содержанием, включённые в 2019 году в экзаменационные варианты ЕГЭ по математике под номером 10 (профильный уровень), представляют собой задачи на анализ явления, описываемого формулой функциональной зависимости. При этом явления, положенные в основу задачной фабулы, отобраны так, что соответствующие функции являются привычными для школьников: это линейные, квадратичные, степенные, показательные, логарифмические или тригонометрические функции.

Каждая из фабул представляет собой описание того или иного явления с указанием формулы, которой оно описывается, параметров и констант в этой формуле и необходимых единиц измерения. Все единицы измерения приведены в единой используемой в задаче системе единиц (СИ или СГС), и, как правило, от учащихся не требуется перевода единиц измерения из одной системы в другую.

Решение предложенных задач условно можно разделить на несколько шагов:

а) анализ условия и вычленение формулы, описывающей заданную ситуацию, а также значений параметров, констант или начальных условий, которые необходимо подставить в эту формулу;

б) математическая интерпретация задачи — сведение её к уравнению или неравенству и его решение;

в) анализ полученного решения.

Проиллюстрируем этот подход на нескольких примерах.

Задача 1. Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону

$$h(t) = 1,6 + 8t - 5t^2,$$

где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее трёх метров?

Решение. Формулой, описывающей изменение высоты мяча с течением времени, является

$$h(t) = 1,6 + 8t - 5t^2,$$

в эту формулу не требуется подставлять значения параметров или констант.

Решим задачу двумя способами: сведём её к решению уравнения и к решению неравенства. Заметьте, что в данной задаче сведение к неравенству предпочтительнее сведения к уравнению.

Способ 1. Определим моменты времени, когда мяч находился на высоте ровно три метра. Для этого решим уравнение $h(t) = 3$:

$$h(t) = 3 \Leftrightarrow 1,6 + 8t - 5t^2 = 3 \Leftrightarrow 5t^2 - 8t + 1,4 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} t = 0,2; \\ t = 1,4. \end{cases}$$

Проанализируем полученный результат: поскольку по условию задачи мяч брошен снизу вверх, это означает, что в момент времени $t = 0,2$ (с) мяч находился на высоте 3 метра, двигаясь снизу вверх, а в момент времени $t = 1,4$ (с) мяч находился на этой высоте, двигаясь сверху вниз. Поэтому он находился на высоте не менее трёх метров 1,2 секунды.

Способ 2. Условие «мяч находится на высоте не менее трёх метров» эквивалентно неравенству $h(t) \geq 3$. Решим его:

$$h(t) \geq 3 \Leftrightarrow 1,6 + 8t - 5t^2 \geq 3 \Leftrightarrow 5t^2 - 8t + 1,4 \leq 0 \Leftrightarrow 0,2 \leq t \leq 1,4.$$

Проанализируем полученный результат: мяч будет находиться на указанной высоте в период времени от 0,2 до 1,4 секунды, т. е. в течение 1,2 секунды.

Ответ: 1,2.

Примечание 1. Точных равенств в физике не бывает: все измерения осуществляются с какой-то погрешностью, а законы выполняются лишь с некоторой точностью. Однако, решая уравнение и представляя себе ход того или иного процесса, мы обычно можем получить и решение соответствующего неравенства. (Вспомните метод интервалов для решения неравенств — он основан именно на этой идее.) В заданиях, включённых в контрольно-измерительные материалы, рассматриваются только функции, обладающие свойствами, необходимыми для применения метода интервалов. Соответственно, любая из задач с прикладным содержанием может быть сведена либо к уравнению, либо к неравенству.

Выбор того или иного пути решения чаще всего будет обусловлен личными предпочтениями решающего. Из общих соображений можно сказать лишь, что решать уравнение, как правило, проще, чем неравенство, но интерпретация полученного решения иногда может быть затруднительна. В учебных целях мы предлагаем решать задачи двумя способами, вне зависимости от того, какой именно предпочтительнее в данной конкретной задаче.

Отметим также, что задания на решение иррациональных и тригонометрических неравенств не входят в действующий стандарт полного общего образования по математике базового уровня и не включаются в экзаменационные задания базового уровня. Мы рекомендуем рассмотрение соответствующих неравенств с учащимися, изучающими математику на профильном уровне.

Задача 2. В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём, выраженная в метрах, меняется по закону

$$H(t) = 0,01t^2 - 0,4t + 4,$$

где t — время (в минутах), прошедшее с момента открытия крана. В течение какого времени вода будет вытекать из бака? Ответ приведите в минутах.

Решение. Формулой, описывающей уменьшение высоты столба воды с течением времени, является $H(t) = 0,01t^2 - 0,4t + 4$, в эту формулу не требуется подставлять значения параметров или констант. Решим задачу двумя способами: сведём её к решению уравнения и к решению неравенства. Заметьте, что в данной задаче сведение к уравнению предпочтительнее сведения к неравенству.

Способ 1. Вода будет вытекать из бака, пока её уровень не понизится до нуля. Определим требуемое на это время, решая уравнение $H(t) = 0$:

$$H(t) = 0 \Leftrightarrow 0,01t^2 - 0,4t + 4 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 40t + 400 = 0 \Leftrightarrow t = 20.$$

Это означает, что по прошествии 20 минут вся вода вытечет из бака.

Способ 2. Условие «вода будет вытекать из бака» эквивалентно неравенству $H(t) \geq 0$: пока высота столба воды больше нуля, вода будет вытекать из бака. Решим неравенство $H(t) \geq 0$:

$$H(t) \geq 0 \Leftrightarrow 0,01t^2 - 0,4t + 4 \geq 0 \Leftrightarrow t^2 - 40t + 400 \geq 0 \Leftrightarrow (t - 20)^2 \geq 0.$$

Проанализируем полученный результат: неравенству удовлетворяют все значения переменной t . Это означает, что высота столба не может стать отрицательной ни в какой момент времени. Нулевого значения высота столба воды достигает при $t = 20$. Таким образом, столб воды опустится до нуля за 20 минут.

Ответ: 20.

Задача 3. В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба

воды в нём, выраженная в метрах, меняется по закону

$$H(t) = at^2 + bt + H_0,$$

где $H_0 = 4$ м — начальный уровень воды, $a = \frac{1}{100}$ м/мин² и $b = -\frac{2}{5}$ м/мин — постоянные, t — время (в минутах), прошедшее с момента открытия крана. В течение какого времени вода будет вытекать из бака? Ответ приведите в минутах.

Решение. Формулой, описывающей уменьшение высоты столба воды с течением времени, является $H(t) = at^2 + bt + H_0$. В формулу требуется подставить заданные в условии значения параметров a и b и начальный уровень воды H_0 ; получим

$$H(t) = 0,01t^2 - 0,4t + 4.$$

Этим задача свелась к предыдущей.

Примечание 2. Мы находим чрезвычайно важным подчеркнуть, что приведённые формулы функциональных зависимостей не являются произвольными математическими выражениями! Числовые коэффициенты в них имеют вполне определённую физическую природу и связаны между собой. В действительности высота (в метрах) столба жидкости, вытекающей из бака через кран небольшого диаметра, меняется с течением времени по закону

$$H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0} \cdot kt + \frac{g}{2}k^2t^2,$$

где t — время (в секундах), прошедшее с момента открытия крана, H_0 — начальная высота столба воды в метрах, g — ускорение свободного падения в м/с², k — отношение площадей поперечных сечений крана и бака.

Тем самым задачи 2 и 3 — соответственно более или менее упрощённые формулировки (заметьте, что время там измеряется в минутах) следующей задачи, которую можно предложить хорошо успевающим школьникам при подготовке к экзамену.

Задача 4. В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём, выраженная в метрах, меняется по закону

$$H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0} \cdot kt + \frac{g}{2}k^2t^2,$$

где t — время (в секундах), прошедшее с момента открытия крана, $H_0 = 20$ м — начальная высота столба воды, $k = \frac{1}{50}$ — отношение площадей поперечных сечений крана и бака, а g — ускорение свободного падения (считайте, что $g = 10$ м/с²). Через сколько секунд после открытия крана в баке останется четверть первоначального объёма воды? (Ответ: 50.)

В дальнейшем большинство задач приводится в неупрощённом виде. В начале книги дана вводная диагностическая работа, позволяющая определить степень готовности учащихся к решению задач с прикладным содержанием. Далее разобраны все задачи вводной диагностической работы; на каждый тип заданий приведены упражнения

(тренировочные работы 1—8). В конце даны варианты итоговой проверки и контроля знаний (диагностические работы 1—3).

Круг задач, предлагаемых для подготовки к экзамену, достаточно широк: это и задачи с экономическим содержанием, и задачи о тепловом расширении тел, о сокращении длины быстро движущихся ракет, об определении глубин колодцев и об исследовании температуры звёзд, о проектировании подводных аппаратов, о скейтбордистах, автогонщиках, тракторах и даже о водолазных колоколах. Все эти задачи размещены в открытом доступе на сайте <http://mathege.ru>.

Научиться решать задачи — одна из важнейших целей образования. Овладеть математическими знаниями, позволяющими описывать окружающий нас мир, научиться составлять, анализировать и интерпретировать соответствующие математические модели — наиважнейшая цель математического образования. Помочь в этом нелёгком труде и призвана наша книжка.

Диагностическая работа

Ответами на задания диагностической работы должны быть целые числа или конечные десятичные дроби. Единицы измерений в ответы писать не нужно.

1. При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0 = 10$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону

$$l(t^{\circ}) = l_0(1 + \alpha \cdot t^{\circ}),$$

где $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} (^{\circ}\text{C})^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 3 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

2. Камнемётательная машина выстреливает камни под некоторым острым углом к горизонту с фиксированной начальной скоростью. Траектория полёта камня в системе координат, связанной с машиной, описывается формулой

$$y = ax^2 + bx,$$

где $a = -\frac{1}{100} \text{ м}^{-1}$, $b = 1$ — постоянные параметры, x (м) — смещение камня по горизонтали, y (м) — высота камня над землёй. На каком наибольшем расстоянии (в метрах) от крепостной стены высотой 8 м нужно расположить машину, чтобы камни пролетали над стеной на высоте не менее 1 метра?

3. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана—Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела P , измеряемая в ваттах, прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры:

$$P = \sigma ST^4,$$

где $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$ — постоянная, площадь S измеряется в квадратных метрах, температура T — в градусах Кельвина, а мощность P — в ваттах. Известно, что некоторая звезда имеет площадь поверхности $S = \frac{1}{16} \cdot 10^{20} \text{ м}^2$, а излучаемая ею мощность P не менее $9,12 \cdot 10^{25} \text{ Вт}$. Определите наименьшую возможную температуру этой звезды. Приведите ответ в градусах Кельвина.

Ответы:

1

--	--	--	--	--	--	--	--

2

--	--	--	--	--	--	--	--

3

--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Ответы:

4

--	--	--	--	--	--	--	--

5

--	--	--	--	--	--	--	--

6

--	--	--	--	--	--	--	--

7

--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	,	
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	--

Диагностическая работа

4. Перед отправкой тепловоз издал гудок с частотой $f_0 = 440$ Гц. Чуть позже издал гудок подъезжающий к платформе тепловоз. Из-за эффекта Доплера частота второго гудка f больше первого: она зависит от скорости тепловоза по закону

$$f(v) = \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}},$$

где c — скорость звука в воздухе (в м/с). Человек, стоящий на платформе, различает сигналы по тону, если они отличаются не менее чем на 10 Гц. Определите, с какой минимальной скоростью приближался к платформе тепловоз, если человек смог различить сигналы (считайте, что $c = 315$ м/с). Ответ выразите в м/с.

5. Скорость автомобиля, разгоняющегося с места старта по прямолинейному отрезку пути длиной l (в километрах) с постоянным ускорением a (в км/ч²), вычисляется по формуле

$$v = \sqrt{2la}.$$

Определите наименьшее ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав один километр, приобрести скорость не менее 100 км/ч. Ответ выразите в км/ч².

6. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону

$$m(t) = m_0 \cdot 2^{-t/T},$$

где m_0 — начальная масса изотопа, t — время, прошедшее от начала распада, T — период полураспада в минутах. В лаборатории получили вещество, содержащее $m_0 = 40$ мг изотопа азота-13, период полураспада которого $T = 10$ мин. В течение скольких минут масса изотопа азота-13 будет не меньше 10 мг?

7. Для обогрева помещения, температура в котором $T_n = 20^\circ\text{C}$, через радиатор пропускают горячую воду температурой $T_b = 60^\circ\text{C}$. Через радиатор проходит $m = 0,3$ кг/с воды. Проходя по радиатору расстояние $x = 84$ м, вода охлаждается до температуры T ($^\circ\text{C}$), причём

$$x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_b - T_n}{T - T_n},$$

Диагностическая работа

где $c = 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$ — теплоёмкость воды, $\gamma = 21 \frac{\text{Вт}}{^\circ\text{C}}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 0,7$ — постоянная. До какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода?

8. При бросании мяча под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли его время в полёте, выраженное в секундах, равно

$$t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$

При каком наименьшем значении угла α (в градусах) время в полёте будет не меньше 3 секунд, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 30 \text{ м/с}$? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10 \text{ м/с}^2$.

9. На рельсах стоит платформа. Скейтбордист прыгает на неё со скоростью $v = 3 \text{ м/с}$ под острым углом α к рельсам. От толчка платформа начинает ехать со скоростью

$$u = \frac{m}{m+M} v \cos \alpha,$$

где $m = 80 \text{ кг}$ — масса скейтбордиста со скейтом, а $M = 400 \text{ кг}$ — масса платформы. Под каким наибольшим углом α (в градусах) нужно прыгать, чтобы разогнать платформу до скорости не менее чем $0,25 \text{ м/с}$?

10. Катер должен пересечь реку шириной $L = 100 \text{ м}$ так, чтобы причалить точно напротив места отправления. Скорость течения реки $u = 0,5 \text{ м/с}$. Время в пути, измеряемое в секундах, равно

$$t = \frac{L}{u} \operatorname{ctg} \alpha,$$

где α — острый угол между осью катера и линией берега (см. рис. на с. 59). Под каким минимальным углом α к берегу нужно направить катер, чтобы время в пути было не больше 200 с? Ответ дайте в градусах.

Ответы:

8

--	--	--	--	--	--	--	--

9

--	--	--	--	--	--	--	--

10

--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

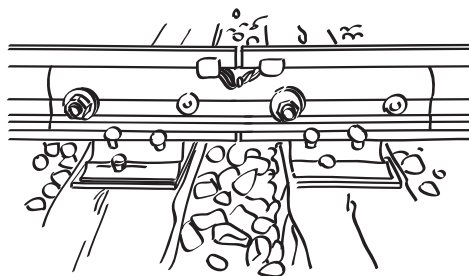
Задачи, приводящие к линейным уравнениям или неравенствам.

Решение задачи 1 диагностической работы

1. При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0 = 10$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону

$$l(t^{\circ}) = l_0(1 + \alpha \cdot t^{\circ}),$$

где $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} (^{\circ}\text{C})^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 3 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.



Решение. Задача сводится к решению уравнения

$$l(t^{\circ}) - l_0 = 3 \text{ (мм)}$$

при заданных значениях длины $l_0 = 10$ м и коэффициента теплового расширения $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} (^{\circ}\text{C})^{-1}$:

$$\begin{aligned} l(t^{\circ}) - l_0 = 3 \cdot 10^{-3} &\Leftrightarrow l_0(1 + \alpha \cdot t^{\circ}) - l_0 = 3 \cdot 10^{-3} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow l_0 \alpha t^{\circ} = 3 \cdot 10^{-3} \Leftrightarrow 10 \cdot 1,2 \cdot 10^{-5} t^{\circ} = 3 \cdot 10^{-3} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow t^{\circ} = \frac{3 \cdot 10^{-3}}{1,2 \cdot 10^{-4}} \Leftrightarrow t^{\circ} = 25 ^{\circ}\text{C}. \end{aligned}$$

Ответ: 25.

Тренировочная работа 1

T1.1. При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0 = 10$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону

$$l(t^{\circ}) = l_0(1 + \alpha \cdot t^{\circ}),$$

где $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} (^{\circ}\text{C})^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 4,5 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

T1.2. При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0 = 10$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону

$$l(t^{\circ}) = l_0(1 + \alpha \cdot t^{\circ}),$$

где $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} (^{\circ}\text{C})^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 6 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

T1.3. При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0 = 10$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону

$$l(t^{\circ}) = l_0(1 + \alpha \cdot t^{\circ}),$$

где $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} (^{\circ}\text{C})^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 9 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

T1.4. При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0 = 15$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону

$$l(t^{\circ}) = l_0(1 + \alpha \cdot t^{\circ}),$$

где $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} (^{\circ}\text{C})^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 4,5 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

Ответы:

T1.1

--	--	--	--	--	--	--	--

T1.2

--	--	--	--	--	--	--	--

T1.3

--	--	--	--	--	--	--	--

T1.4

--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Ответы:

T1.5

--	--	--	--	--	--	--	--

T1.5. Некоторая компания продаёт свою продукцию по цене $p = 600$ руб. за единицу, переменные затраты на производство одной единицы продукции составляют $v = 300$ руб., постоянные расходы предприятия $f = 700\,000$ руб. в месяц. Месячная операционная прибыль предприятия, выраженная в рублях, вычисляется по формуле

$$\pi(q) = q(p - v) - f.$$

Определите наименьший месячный объём производства q (единиц продукции), при котором месячная операционная прибыль предприятия будет не меньше $500\,000$ руб.

T1.6

--	--	--	--	--	--	--	--

T1.6. Некоторая компания продаёт свою продукцию по цене $p = 500$ руб. за единицу, переменные затраты на производство одной единицы продукции составляют $v = 200$ руб., постоянные расходы предприятия $f = 900\,000$ руб. в месяц. Месячная операционная прибыль предприятия, выраженная в рублях, вычисляется по формуле

$$\pi(q) = q(p - v) - f.$$

Определите наименьший месячный объём производства q (единиц продукции), при котором месячная операционная прибыль предприятия будет не меньше $600\,000$ руб.

T1.7

--	--	--	--	--	--	--	--

T1.7. Некоторая компания продаёт свою продукцию по цене $p = 400$ руб. за единицу, переменные затраты на производство одной единицы продукции составляют $v = 200$ руб., постоянные расходы предприятия $f = 500\,000$ руб. в месяц. Месячная операционная прибыль предприятия, выраженная в рублях, вычисляется по формуле

$$\pi(q) = q(p - v) - f.$$

Определите наименьший месячный объём производства q (единиц продукции), при котором месячная операционная прибыль предприятия будет не меньше $300\,000$ руб.

T1.8

--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Тренировочная работа 1

вычисляется по формуле

$$\pi(q) = q(p - v) - f.$$

Определите наименьший месячный объём производства q (единиц продукции), при котором месячная операционная прибыль предприятия будет не меньше 400 000 руб.

T1.9. После дождя уровень воды в колодце может повыситься. Мальчик измеряет время падения t небольших камешков в колодец и рассчитывает расстояние до воды по формуле

$$h = 5t^2,$$

где h — расстояние в метрах, t — время падения в секундах, прошедшее с момента броска. До дождя время падения камешков составляло 0,6 с. На сколько должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось на 0,2 с? Ответ выразите в метрах.

T1.10. После дождя уровень воды в колодце может повыситься. Мальчик измеряет время падения t небольших камешков в колодец и рассчитывает расстояние до воды по формуле

$$h = 5t^2,$$

где h — расстояние в метрах, t — время падения в секундах, прошедшее с момента броска. До дождя время падения камешков составляло 0,8 с. На сколько должен подняться уровень воды после дождя, чтобы измеряемое время изменилось на 0,2 с? Ответ выразите в метрах.

T1.9

--	--	--	--	--	--	--	--

T1.10

--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

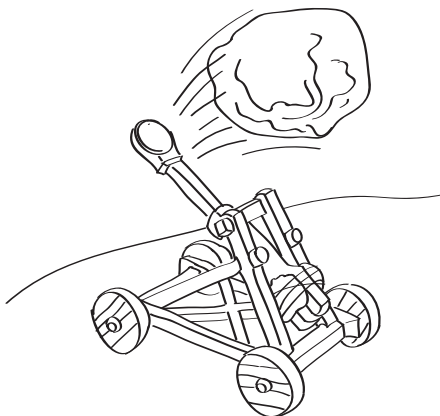
Задачи, приводящие к квадратным уравнениям или неравенствам.

Решение задачи 2 диагностической работы

2. Камнеметательная машина выстреливает камни под некоторым острым углом к горизонту с фиксированной начальной скоростью. Траектория полёта камня в системе координат, связанной с машиной, описывается формулой

$$y = ax^2 + bx,$$

где $a = -\frac{1}{100} \text{ м}^{-1}$, $b = 1$ — постоянные параметры, x (м) — смещение камня по горизонтали, y (м) — высота камня над землёй. На каком наибольшем расстоянии (в метрах) от крепостной стены высотой 8 м нужно расположить машину, чтобы камни пролетали над стеной на высоте не менее 1 метра?



Решение. Задача сводится к решению неравенства $y \geq 9$: при заданных значениях параметров a и b

$$\begin{aligned} y \geq 9 &\Leftrightarrow -\frac{1}{100}x^2 + x \geq 9 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow x^2 - 100x + 900 \leq 0 \Leftrightarrow 10 \leq x \leq 90 \text{ м.} \end{aligned}$$

Камни будут перелетать крепостную стену на высоте не менее 1 метра, если камнеметательная машина будет находиться на расстоянии от 10 до 90 метров от этой стены. Наибольшее расстояние — 90 метров.

Ответ: 90.

Решение задачи 2 диагностической работы

Рассмотрим ещё два примера.

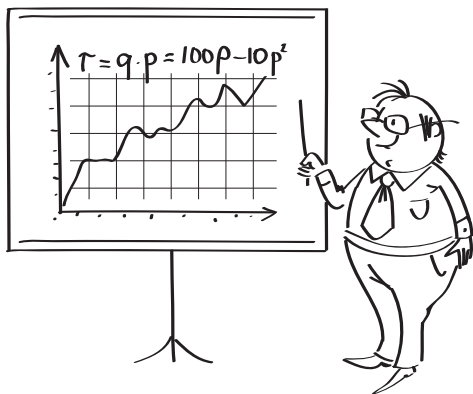
2а. Зависимость объёма спроса q на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб.) задаётся формулой

$$q = 100 - 10p.$$

Выручка предприятия за месяц r (в тыс. руб.) определяется как

$$r(p) = q \cdot p.$$

Определите максимальный уровень цены p , при котором месячная выручка $r(p)$ составит не менее 240 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.



Решение. Задача сводится к решению неравенства $r(p) \geq 240$:

$$r(p) = q \cdot p = (100 - 10p)p = 100p - 10p^2,$$

$$r(p) \geq 240 \Leftrightarrow 10p^2 - 100p + 240 \leq 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow p^2 - 10p + 24 \leq 0 \Leftrightarrow 4 \leq p \leq 6.$$

Ответ: 6.

26. Если достаточно быстро вращать ведро с водой на верёвке в вертикальной плоскости, то вода не будет выливаться. При вращении ведёрка сила давления воды на дно не остаётся постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила её давления на дно будет положительной во всех точках траектории, кроме верхней, где она может быть равной нулю. В верхней точке сила давления, выраженная в ньютонах, равна

$$P = m \left(\frac{v^2}{L} - g \right),$$

где m — масса воды в килограммах, v — скорость движения ведёрка в м/с, L — длина верёвки в метрах, g — ускорение свободного падения (считайте, что $g = 10$ м/с²). С какой минимальной скоростью надо вращать ведро, чтобы вода не выливалась, если длина верёвки равна 0,441 м? Ответ выразите в м/с.



Решение. Задача сводится к решению неравенства $P(v) \geq 0$: при заданной длине верёвки $L = 0,441$ м имеем

$$\begin{aligned} P \geq 0 &\Leftrightarrow m \left(\frac{v^2}{L} - g \right) \geq 0 \stackrel{m>0}{\Leftrightarrow} \frac{v^2}{0,441} - 10 \geq 0 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow v^2 \geq 4,41 \stackrel{v>0}{\Leftrightarrow} v \geq 2,1 \text{ м/с.} \end{aligned}$$

Ответ: 2,1.

Тренировочная работа 2

T2.1. Зависимость объёма спроса q на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб.) задаётся формулой

$$q = 60 - 5p.$$

Выручка предприятия за месяц r (в тыс. руб.) определяется как $r(p) = q \cdot p$. Определите максимальный уровень цены p , при котором месячная выручка $r(p)$ составит не менее 160 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

T2.2. Зависимость объёма спроса q на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб.) задаётся формулой

$$q = 85 - 5p.$$

Выручка предприятия за месяц r (в тыс. руб.) определяется как $r(p) = q \cdot p$. Определите максимальный уровень цены p , при котором месячная выручка $r(p)$ составит не менее 300 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

T2.3. Зависимость объёма спроса q на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб.) задаётся формулой

$$q = 70 - 5p.$$

Выручка предприятия за месяц r (в тыс. руб.) определяется как $r(p) = q \cdot p$. Определите максимальный уровень цены p , при котором месячная выручка $r(p)$ составит не менее 240 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

T2.4. Зависимость объёма спроса q на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб.) задаётся формулой

$$q = 160 - 10p.$$

Выручка предприятия за месяц r (в тыс. руб.) определяется как $r(p) = q \cdot p$. Определите максимальный уровень цены p , при котором месячная выручка $r(p)$ составит не менее 600 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

T2.5. Если достаточно быстро вращать ведёрко с водой на верёвке в вертикальной плоскости, то вода не будет выливаться. При вращении ведёрка сила давления воды на дно не остаётся постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила её давления на дно будет положительной во всех точках траектории, кроме верхней, где она может быть равной нулю. В верхней точке

Ответы:

T2.1

--	--	--	--	--	--	--	--

T2.2

--	--	--	--	--	--	--	--

T2.3

--	--	--	--	--	--	--	--

T2.4

--	--	--	--	--	--	--	--

T2.5

--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

сила давления, выраженная в ньютонах, равна

$$P = m \left(\frac{v^2}{L} - g \right),$$

где m — масса воды в килограммах, v — скорость движения ведёрка в м/с, L — длина верёвки в метрах, g — ускорение свободного падения (считайте, что $g = 10 \text{ м/с}^2$). С какой минимальной скоростью надо вращать ведёрко, чтобы вода не выливалась, если длина верёвки равна 0,4 м? Ответ выразите в м/с.

T2.6. Если достаточно быстро вращать ведёрко с водой на верёвке в вертикальной плоскости, то вода не будет выливаться. При вращении ведёрка сила давления воды на дно не остаётся постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила её давления на дно будет положительной во всех точках траектории, кроме верхней, где она может быть равной нулю. В верхней точке сила давления, выраженная в ньютонах, равна

$$P = m \left(\frac{v^2}{L} - g \right),$$

где m — масса воды в килограммах, v — скорость движения ведёрка в м/с, L — длина верёвки в метрах, g — ускорение свободного падения (считайте, что $g = 10 \text{ м/с}^2$). С какой минимальной скоростью надо вращать ведёрко, чтобы вода не выливалась, если длина верёвки равна 0,625 м? Ответ выразите в м/с.

T2.7. Если достаточно быстро вращать ведёрко с водой на верёвке в вертикальной плоскости, то вода не будет выливаться. При вращении ведёрка сила давления воды на дно не остаётся постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила её давления на дно будет положительной во всех точках траектории, кроме верхней, где она может быть равной нулю. В верхней точке сила давления, выраженная в ньютонах, равна

$$P = m \left(\frac{v^2}{L} - g \right),$$

где m — масса воды в килограммах, v — скорость движения ведёрка в м/с, L — длина верёвки в метрах, g — ускорение свободного падения (считайте, что $g = 10 \text{ м/с}^2$). С какой минимальной скоростью надо вращать ведёрко, чтобы вода не выливалась, если длина верёвки равна 0,729 м? Ответ выразите в м/с.

T2.6

--	--	--	--	--	--	--	--

T2.7

--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	,	
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	--

T2.8. Если достаточно быстро вращать ведёрко с водой на верёвке в вертикальной плоскости, то вода не будет выливаться. При вращении ведёрка сила давления воды на дно не остаётся постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила её давления на дно будет положительной во всех точках траектории, кроме верхней, где она может быть равной нулю. В верхней точке сила давления, выраженная в ньютонах, равна

$$P = m \left(\frac{v^2}{L} - g \right),$$

где m — масса воды в килограммах, v — скорость движения ведёрка в м/с, L — длина верёвки в метрах, g — ускорение свободного падения (считайте, что $g = 10 \text{ м/с}^2$). С какой минимальной скоростью надо вращать ведёрко, чтобы вода не выливалась, если длина верёвки равна 0,784 м? Ответ выразите в м/с.

T2.9. Камнемётательная машина выстреливает камни под некоторым острым углом к горизонту с фиксированной начальной скоростью. Траектория полёта камня в системе координат, связанной с машиной, описывается формулой

$$y = ax^2 + bx,$$

где $a = -\frac{1}{60} \text{ м}^{-1}$, $b = \frac{7}{6}$ — постоянные параметры, x (м) — смещение камня по горизонтали, y (м) — высота камня над землёй. На каком наибольшем расстоянии (в метрах) от крепостной стены высотой 9 м нужно расположить машину, чтобы камни пролетали над стеной на высоте не менее 1 метра?

T2.10. Камнемётательная машина выстреливает камни под некоторым острым углом к горизонту с фиксированной начальной скоростью. Траектория полёта камня в системе координат, связанной с машиной, описывается формулой

$$y = ax^2 + bx,$$

где $a = -\frac{1}{160} \text{ м}^{-1}$, $b = \frac{7}{8}$ — постоянные параметры, x (м) — смещение камня по горизонтали, y (м) — высота камня над землёй. На каком наибольшем расстоянии (в метрах) от крепостной стены высотой 14 м нужно расположить машину, чтобы камни пролетали над стеной на высоте не менее 1 метра?

T2.8

--	--	--	--	--	--	--	--

T2.9

--	--	--	--	--	--	--	--

T2.10

--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Ответы:

T2.11

--	--	--	--	--	--	--	--

T2.11. Камнеметательная машина выстреливает камни под некоторым острым углом к горизонту с фиксированной начальной скоростью. Траектория полёта камня в системе координат, связанной с машиной, описывается формулой

$$y = ax^2 + bx,$$

где $a = -\frac{1}{100} \text{ м}^{-1}$, $b = \frac{7}{10}$ — постоянные параметры, x (м) — смещение камня по горизонтали, y (м) — высота камня над землёй. На каком наибольшем расстоянии (в метрах) от крепостной стены высотой 9 м нужно расположить машину, чтобы камни пролетали над стеной на высоте не менее 1 метра?

T2.12

--	--	--	--	--	--	--	--

T2.12. Камнеметательная машина выстреливает камни под некоторым острым углом к горизонту с фиксированной начальной скоростью. Траектория полёта камня в системе координат, связанной с машиной, описывается формулой

$$y = ax^2 + bx,$$

где $a = -\frac{1}{25} \text{ м}^{-1}$, $b = \frac{7}{5}$ — постоянные параметры, x (м) — смещение камня по горизонтали, y (м) — высота камня над землёй. На каком наибольшем расстоянии (в метрах) от крепостной стены высотой 9 м нужно расположить машину, чтобы камни пролетали над стеной на высоте не менее 1 метра?

T2.13

--	--	--	--	--	--	--	--

T2.13. Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону

$$h(t) = 1,4 + 9t - 5t^2,$$

где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее трёх метров?

T2.14

--	--	--	--	--	--	--	--

T2.14. Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону

$$h(t) = 1,2 + 10t - 5t^2,$$

где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее трёх метров?

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	,	
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	--

Тренировочная работа 2

Тренировочная работа 2

T2.15. Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону

$$h(t) = 1 + 11t - 5t^2,$$

где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее трёх метров?

T2.16. Высота над землёй подброшенного вверх мяча меняется по закону

$$h(t) = 1,8 + 12t - 5t^2,$$

где h — высота в метрах, t — время в секундах, прошедшее с момента броска. Сколько секунд мяч будет находиться на высоте не менее четырёх метров?

T2.17. В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём, выраженная в метрах, меняется по закону

$$H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0} \cdot kt + \frac{g}{2} k^2 t^2,$$

где t — время (в секундах), прошедшее с момента открытия крана, $H_0 = 20$ м — начальная высота столба воды, $k = \frac{1}{500}$ — отношение площадей поперечных сечений крана и бака, а g — ускорение свободного падения (считайте, что $g = 10$ м/с²). Через сколько секунд после открытия крана в баке останется четверть первоначального объёма?

T2.18. В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём, выраженная в метрах, меняется по закону

$$H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0} \cdot kt + \frac{g}{2} k^2 t^2,$$

где t — время (в секундах), прошедшее с момента открытия крана, $H_0 = 20$ м — начальная высота столба воды, $k = \frac{1}{200}$ — отношение площадей поперечных сечений крана и бака, а g — ускорение свободного падения (считайте, что $g = 10$ м/с²). Через сколько секунд после открытия крана в баке останется четверть первоначального объёма?

Ответы:

T2.15

--	--	--	--	--	--	--	--

T2.16

--	--	--	--	--	--	--	--

T2.17

--	--	--	--	--	--	--	--

T2.18

--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Ответы:

T2.19

--	--	--	--	--	--	--	--

T2.20

--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Тренировочная работа 2

T2.19. В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём, выраженная в метрах, меняется по закону

$$H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0} \cdot kt + \frac{g}{2}k^2t^2,$$

где t — время (в секундах), прошедшее с момента открытия крана, $H_0 = 20$ м — начальная высота столба воды, $k = \frac{1}{300}$ — отношение площадей поперечных сечений крана и бака, а g — ускорение свободного падения (считайте, что $g = 10$ м/с²). Через сколько секунд после открытия крана в баке останется четверть первоначального объёма?

T2.20. В боковой стенке высокого цилиндрического бака у самого дна закреплён кран. После его открытия вода начинает вытекать из бака, при этом высота столба воды в нём, выраженная в метрах, меняется по закону

$$H(t) = H_0 - \sqrt{2gH_0} \cdot kt + \frac{g}{2}k^2t^2,$$

где t — время (в секундах), прошедшее с момента открытия крана, $H_0 = 20$ м — начальная высота столба воды, $k = \frac{1}{400}$ — отношение площадей поперечных сечений крана и бака, g — ускорение свободного падения (считайте, что $g = 10$ м/с²). Через сколько секунд после открытия крана в баке останется четверть первоначального объёма?

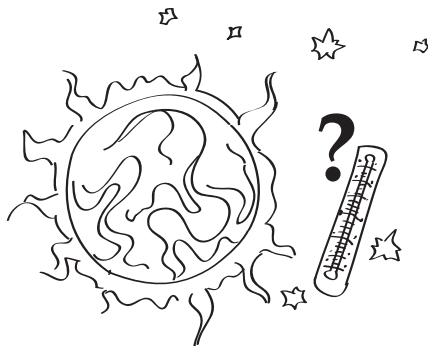
Задачи, приводящие к степенным уравнениям или неравенствам.

Решение задачи 3 диагностической работы

3. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана—Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры:

$$P = \sigma ST^4,$$

где $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$ — постоянная, площадь S измеряется в квадратных метрах, температура T — в градусах Кельвина, а мощность P — в ваттах. Известно, что некоторая звезда имеет площадь поверхности $S = \frac{1}{16} \cdot 10^{20} \text{ м}^2$, а излучаемая ею мощность P не менее $9,12 \cdot 10^{25} \text{ Вт}$. Определите наименьшую возможную температуру этой звезды. Приведите ответ в градусах Кельвина.



Решение. Задача сводится к решению неравенства

$$P \geq 9,12 \cdot 10^{25}$$

при известном значении постоянной $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8}$ и заданной площади звезды $S = \frac{1}{16} \cdot 10^{20} \text{ м}^2$:

$$\begin{aligned} P \geq 9,12 \cdot 10^{25} &\Leftrightarrow \sigma ST^4 \geq 9,12 \cdot 10^{25} \Leftrightarrow T^4 \geq \frac{9,12 \cdot 10^{25}}{\sigma S} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow T \geq \sqrt[4]{\frac{9,12 \cdot 10^{25}}{5,7 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{1}{16} \cdot 10^{20}}} \Leftrightarrow T \geq \sqrt[4]{256 \cdot 10^{12}} = 4000 \text{ К.} \end{aligned}$$

Ответ: 4000.

Рассмотрим ещё одну задачу.

За. На верфи инженеры проектируют новый подводный зонд для изучения морских глубин. Конструкция будет крепиться ко дну при помощи троса. Зонд имеет кубическую форму, а значит, сила натяжения троса определяется по формуле $T = \rho g l^3 - mg$, где l — линейный размер аппарата в метрах, $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ — плотность воды, g — ускорение свободного падения (считайте, что $g = 10 \text{ Н/кг}$), а $m = 500 \text{ кг}$ — масса зонда. Каковы могут быть максимальные линейные размеры зонда, чтобы обеспечить его эксплуатацию в условиях, когда сила натяжения троса будет не больше чем $75\,000 \text{ Н}$? Ответ выразите в метрах.

Решение. Задача сводится к решению неравенства $T \leq 75\,000$ при заданных значениях плотности воды, ускорении свободного падения и массы зонда:

$$\begin{aligned} T \leq 75\,000 &\Leftrightarrow 1000 \cdot 10 \cdot l^3 - 500 \cdot 10 \leq 75\,000 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow l^3 \leq 8 \Leftrightarrow l \leq 2\text{ м}. \end{aligned}$$

Ответ: 2.

Тренировочная работа 3

Т3.1. На верфи инженеры проектируют новый подводный зонд для изучения морских глубин. Конструкция будет крепиться ко дну при помощи троса. Зонд имеет кубическую форму, а значит, сила натяжения троса определяется по формуле

$$T = \rho g l^3 - mg,$$

где l — линейный размер аппарата в метрах, $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ — плотность воды, g — ускорение свободного падения (считайте, что $g = 10 \text{ Н/кг}$), а $m = 25 \text{ кг}$ — масса зонда. Каковы могут быть максимальные линейные размеры зонда, чтобы обеспечить его эксплуатацию в условиях, когда сила натяжения троса будет не больше чем 1000 Н ? Ответ выразите в метрах.

Т3.2. На верфи инженеры проектируют новый подводный зонд для изучения морских глубин. Конструкция будет крепиться ко дну при помощи троса. Зонд имеет кубическую форму, а значит, сила натяжения троса определяется по формуле

$$T = \rho g l^3 - mg,$$

где l — линейный размер аппарата в метрах, $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ — плотность воды, g — ускорение свободного падения (считайте, что $g = 10 \text{ Н/кг}$), а $m = 36 \text{ кг}$ — масса зонда. Каковы могут быть максимальные линейные размеры зонда, чтобы обеспечить его эксплуатацию в условиях, когда сила натяжения троса будет не больше чем 1800 Н ? Ответ выразите в метрах.

Т3.3. На верфи инженеры проектируют новый подводный зонд для изучения морских глубин. Конструкция будет крепиться ко дну при помощи троса. Зонд имеет кубическую форму, а значит, сила натяжения троса определяется по формуле

$$T = \rho g l^3 - mg,$$

где l — линейный размер аппарата в метрах, $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ — плотность воды, g — ускорение свободного падения (считайте, что $g = 10 \text{ Н/кг}$), а $m = 83 \text{ кг}$ — масса зонда. Каковы могут быть максимальные линейные размеры зонда, чтобы обеспечить его эксплуатацию в условиях, когда сила натяжения троса будет не больше чем 2600 Н ? Ответ выразите в метрах.

Ответы:

Т3.1

--	--	--	--	--	--	--	--

Т3.2

--	--	--	--	--	--	--	--

Т3.3

--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Ответы:

Т3.4

--	--	--	--	--	--	--	--

Т3.5

--	--	--	--	--	--	--	--

Т3.6

--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	,	
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	--

Тренировочная работа 3

Т3.4. На верфи инженеры проектируют новый подводный зонд для изучения морских глубин. Конструкция будет крепиться ко дну при помощи троса. Зонд имеет кубическую форму, а значит, сила натяжения троса определяется по формуле

$$T = \rho g l^3 - mg,$$

где l — линейный размер аппарата в метрах, $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ — плотность воды, g — ускорение свободного падения (считайте, что $g = 10 \text{ Н/кг}$), а $m = 112 \text{ кг}$ — масса зонда. Каковы могут быть максимальные линейные размеры зонда, чтобы обеспечить его эксплуатацию в условиях, когда сила натяжения троса будет не больше чем 4000 Н ? Ответ выразите в метрах.

Т3.5. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана—Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры:

$$P = \sigma S T^4,$$

где $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$ — постоянная, площадь S измеряется в квадратных метрах, температура T — в градусах Кельвина, а мощность P — в ваттах. Известно, что некоторая звезда имеет площадь поверхности $S = \frac{1}{228} \cdot 10^{20} \text{ м}^2$, а излучаемая ею мощность P не менее $1,5625 \cdot 10^{25} \text{ Вт}$. Определите наименьшую возможную температуру этой звезды. Приведите ответ в градусах Кельвина.

Т3.6. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана—Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела P , измеряемая в ваттах, прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры:

$$P = \sigma S T^4,$$

где $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$ — постоянная, площадь S измеряется в квадратных метрах, температура T — в градусах Кельвина, а мощность P — в ваттах. Известно, что некоторая звезда имеет площадь поверхности $S = \frac{1}{64} \cdot 10^{20} \text{ м}^2$, а излучаемая ею мощность P не менее $2,28 \cdot 10^{25} \text{ Вт}$. Определите наименьшую возможную температуру этой звезды. Приведите ответ в градусах Кельвина.

Т3.7. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана—Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела P , измеряемая в ваттах, прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры:

$$P = \sigma ST^4,$$

где $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$ — постоянная, площадь S измеряется в квадратных метрах, температура T — в градусах Кельвина, а мощность P — в ваттах. Известно, что некоторая звезда имеет площадь поверхности $S = \frac{1}{128} \cdot 10^{20} \text{ м}^2$, а излучаемая ею мощность P не менее $1,14 \cdot 10^{25} \text{ Вт}$. Определите наименьшую возможную температуру этой звезды. Приведите ответ в градусах Кельвина.

Т3.8. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана—Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела P , измеряемая в ваттах, прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры:

$$P = \sigma ST^4,$$

где $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$ — постоянная, площадь S измеряется в квадратных метрах, температура T — в градусах Кельвина, а мощность P — в ваттах. Известно, что некоторая звезда имеет площадь поверхности $S = \frac{1}{729} \cdot 10^{20} \text{ м}^2$, а излучаемая ею мощность P не менее $5,13 \cdot 10^{25} \text{ Вт}$. Определите наименьшую возможную температуру этой звезды. Приведите ответ в градусах Кельвина.

Т3.9. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана—Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела P , измеряемая в ваттах, прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры:

$$P = \sigma ST^4,$$

где $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$ — постоянная, площадь S измеряется в квадратных метрах, температура T — в градусах Кельвина,

Т3.7

--	--	--	--	--	--	--	--

Т3.8

--	--	--	--	--	--	--	--

Т3.9

--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Т3.10

--	--	--	--	--	--	--	--

а мощность P — в ваттах. Известно, что некоторая звезда имеет площадь поверхности $S = \frac{1}{243} \cdot 10^{20} \text{ м}^2$, а излучаемая ею мощность P не менее $1,539 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$. Определите наименьшую возможную температуру этой звезды. Приведите ответ в градусах Кельвина.

Т3.10. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана—Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела P , измеряемая в ваттах, прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры:

$$P = \sigma ST^4,$$

где $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$ — постоянная, площадь S измеряется в квадратных метрах, температура T — в градусах Кельвина, а мощность P — в ваттах. Известно, что некоторая звезда имеет площадь поверхности $S = \frac{1}{4} \cdot 10^{18} \text{ м}^2$, а излучаемая ею мощность P не менее $1,425 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$. Определите наименьшую возможную температуру этой звезды. Приведите ответ в градусах Кельвина.

Т3.11

--	--	--	--	--	--	--	--

Т3.11. На верфи инженеры проектируют новый подводный зонд для изучения морских глубин. Конструкция будет крепиться ко дну при помощи троса. Зонд имеет кубическую форму, а значит, сила натяжения троса определяется по формуле

$$T = \rho gl^3 - mg,$$

где l — линейный размер аппарата в метрах, $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ — плотность воды, g — ускорение свободного падения (считайте, что $g = 10 \text{ Н/кг}$), а $m = 129 \text{ кг}$ — масса зонда. Каковы могут быть максимальные линейные размеры зонда, чтобы обеспечить его эксплуатацию в условиях, когда сила натяжения троса будет не больше чем 6000 Н ? Ответ выразите в метрах.

Т3.12

--	--	--	--	--	--	--	--

Т3.12. На верфи инженеры проектируют новый подводный зонд для изучения морских глубин. Конструкция будет крепиться ко дну при помощи троса. Зонд имеет кубическую форму, а значит, сила натяжения троса определяется по формуле

$$T = \rho gl^3 - mg,$$

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	,	
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	--

где l — линейный размер аппарата в метрах, $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ — плотность воды, g — ускорение свободного падения (считайте, что $g = 10 \text{ Н/кг}$), а $m = 228 \text{ кг}$ — масса зонда. Каковы могут быть максимальные линейные размеры зонда, чтобы обеспечить его эксплуатацию в условиях, когда сила натяжения троса будет не больше чем $15\,000 \text{ Н}$? Ответ выразите в метрах.

Т3.13. На верфи инженеры проектируют новый подводный зонд для изучения морских глубин. Конструкция будет крепиться ко дну при помощи троса. Зонд имеет кубическую форму, а значит, сила натяжения троса определяется по формуле

$$T = \rho g l^3 - mg,$$

где l — линейный размер аппарата в метрах, $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ — плотность воды, g — ускорение свободного падения (считайте, что $g = 10 \text{ Н/кг}$), а $m = 7 \text{ кг}$ — масса зонда. Каковы могут быть максимальные линейные размеры зонда, чтобы обеспечить его эксплуатацию в условиях, когда сила натяжения троса будет не больше чем 200 Н ? Ответ выразите в метрах.

Т3.14. На верфи инженеры проектируют новый подводный зонд для изучения морских глубин. Конструкция будет крепиться ко дну при помощи троса. Зонд имеет кубическую форму, а значит, сила натяжения троса определяется по формуле

$$T = \rho g l^3 - mg,$$

где l — линейный размер аппарата в метрах, $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ — плотность воды, g — ускорение свободного падения (считайте, что $g = 10 \text{ Н/кг}$), а $m = 275 \text{ кг}$ — масса зонда. Каковы могут быть максимальные линейные размеры зонда, чтобы обеспечить его эксплуатацию в условиях, когда сила натяжения троса будет не больше чем $31\,000 \text{ Н}$? Ответ выразите в метрах.

Т3.15. На верфи инженеры проектируют новый подводный зонд для изучения морских глубин. Конструкция будет крепиться ко дну при помощи троса. Зонд имеет кубическую форму, а значит, сила натяжения троса определяется по формуле

$$T = \rho g l^3 - mg,$$

где l — линейный размер аппарата в метрах, $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ — плотность воды, g — ускорение свободного падения (считайте,

Т3.13

--	--	--	--	--	--	--	--

Т3.14

--	--	--	--	--	--	--	--

Т3.15

--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Ответы:

Тренировочная работа 3

Т3.16

--	--	--	--	--	--	--	--

те, что $g = 10 \text{ Н/кг}$), а $m = 14 \text{ кг}$ — масса зонда. Каковы могут быть максимальные линейные размеры зонда, чтобы обеспечить его эксплуатацию в условиях, когда сила натяжения троса будет не больше чем 500 Н ? Ответ выразите в метрах.

Т3.16. На верфи инженеры проектируют новый подводный зонд для изучения морских глубин. Конструкция будет крепиться ко дну при помощи троса. Зонд имеет кубическую форму, а значит, сила натяжения троса определяется по формуле

$$T = \rho g l^3 - mg,$$

где l — линейный размер аппарата в метрах, $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ — плотность воды, g — ускорение свободного падения (считайте, что $g = 10 \text{ Н/кг}$), а $m = 1025 \text{ кг}$ — масса зонда. Каковы могут быть максимальные линейные размеры зонда, чтобы обеспечить его эксплуатацию в условиях, когда сила натяжения троса будет не больше чем $146\,000 \text{ Н}$? Ответ выразите в метрах.

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

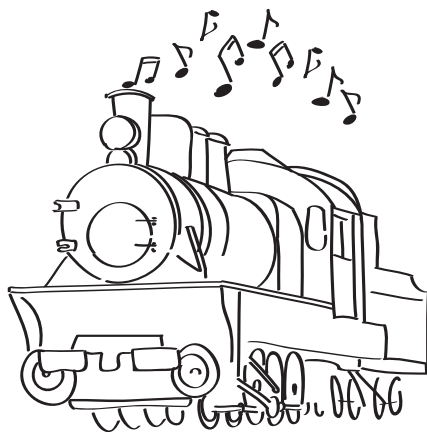
Задачи, приводящие к рациональным уравнениям или неравенствам.

Решение задачи 4 диагностической работы

4. Перед отправкой тепловоз издал гудок с частотой $f_0 = 440$ Гц. Чуть позже издал гудок подъезжающий к платформе тепловоз. Из-за эффекта Доплера частота второго гудка f больше первого: она зависит от скорости тепловоза по закону

$$f(v) = \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}},$$

где c — скорость звука в воздухе (в м/с). Человек, стоящий на платформе, различает сигналы по тону, если они отличаются не менее чем на 10 Гц. Определите, с какой минимальной скоростью приближался к платформе тепловоз, если человек смог различить сигналы (считайте, что $c = 315$ м/с). Ответ выразите в м/с.



Решение. Задача сводится к решению неравенства

$$f(v) - f_0 \geq 10$$

при известном значении постоянной $f_0 = 440$ Гц:

$$\begin{aligned} f(v) - f_0 \geq 10 &\Leftrightarrow \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}} - f_0 \geq 10 \Leftrightarrow \frac{440}{1 - \frac{v}{315}} - 440 \geq 10 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 1 - \frac{v}{315} \leq \frac{44}{45} \Leftrightarrow v \geq \frac{315}{45} = 7 \text{ м/с.} \end{aligned}$$

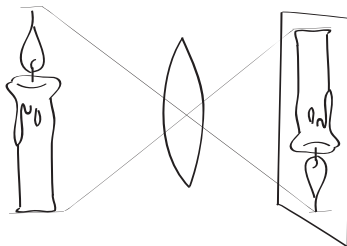
Ответ: 7.

Рассмотрим ещё одну задачу.

4а. Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием $f = 30$ см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 30 до 50 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 150 до 180 см. Изображение на экране будет чётким, если выполнено соотношение

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}.$$

Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы можно поместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким. Ответ выразите в сантиметрах.



Решение. Поскольку $f = 30$, имеем

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{30} \Leftrightarrow \frac{1}{d_1} = \frac{1}{30} - \frac{1}{d_2}.$$

Наименьшему возможному значению d_1 соответствует наибольшее значение левой части полученного равенства и, соответственно, наибольшее возможное значение правой части равенства. Разность $\frac{1}{30} - \frac{1}{d_2}$ в правой части равенства достигает наибольшего значения при наименьшем значении вычитаемого $\frac{1}{d_2}$, которое достигается при наибольшем возможном значении знаменателя d_2 . Поэтому $d_2 = 180$, откуда

$$\frac{1}{d_1} = \frac{1}{30} - \frac{1}{180} \Leftrightarrow \frac{1}{d_1} = \frac{5}{180} \Leftrightarrow \frac{1}{d_1} = \frac{1}{36} \Leftrightarrow d_1 = 36 \text{ см.}$$

По условию лампочка должна находиться на расстоянии от 30 до 50 см от линзы. Найденное значение $d_1 = 36$ см удовлетворяет условию.

Ответ: 36.

Тренировочная работа 4

Т4.1. Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием $f = 30$ см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 30 до 50 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 180 до 210 см. Изображение на экране будет чётким, если выполнено соотношение

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}.$$

Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы можно поместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким. Ответ выразите в сантиметрах.

Т4.2. Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием $f = 35$ см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 35 до 50 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 180 до 210 см. Изображение на экране будет чётким, если выполнено соотношение

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}.$$

Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы можно поместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким. Ответ выразите в сантиметрах.

Т4.3. Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием $f = 35$ см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 35 до 60 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 240 до 280 см. Изображение на экране будет чётким, если выполнено соотношение

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}.$$

Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы можно поместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким. Ответ выразите в сантиметрах.

Ответы:

Т4.1

--	--	--	--	--	--	--	--

Т4.2

--	--	--	--	--	--	--	--

Т4.3

--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Ответы:

T4.4

--	--	--	--	--	--	--	--

T4.5

--	--	--	--	--	--	--	--

T4.6

--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Тренировочная работа 4

T4.4. Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием $f = 40$ см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 40 до 65 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 170 до 200 см. Изображение на экране будет чётким, если выполнено соотношение

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}.$$

Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы можно поместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким. Ответ выразите в сантиметрах.

T4.5. Перед отправкой тепловоз издал гудок с частотой $f_0 = 590$ Гц. Чуть позже издал гудок подъезжающий к платформе тепловоз. Из-за эффекта Доплера частота второго гудка f больше первого: она зависит от скорости тепловоза по закону

$$f(v) = \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}},$$

где c — скорость звука в воздухе (в м/с). Человек, стоящий на платформе, различает сигналы по тону, если они отличаются не менее чем на 10 Гц. Определите, с какой минимальной скоростью приближался к платформе тепловоз, если человек смог различить сигналы (считайте, что $c = 300$ м/с). Ответ выразите в м/с.

T4.6. Перед отправкой тепловоз издал гудок с частотой $f_0 = 245$ Гц. Чуть позже издал гудок подъезжающий к платформе тепловоз. Из-за эффекта Доплера частота второго гудка f больше первого: она зависит от скорости тепловоза по закону

$$f(v) = \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}},$$

где c — скорость звука в воздухе (в м/с). Человек, стоящий на платформе, различает сигналы по тону, если они отличаются не менее чем на 5 Гц. Определите, с какой минимальной скоростью приближался к платформе тепловоз, если человек смог различить сигналы (считайте, что $c = 300$ м/с). Ответ выразите в м/с.

T4.7. Перед отправкой тепловоз издал гудок с частотой

$$f_0 = 190 \text{ Гц.}$$

Чуть позже издал гудок подъезжающий к платформе тепловоз. Из-за эффекта Доплера частота второго гудка f больше первого: она зависит от скорости тепловоза по закону

$$f(v) = \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}},$$

где c — скорость звука в воздухе (в м/с). Человек, стоящий на платформе, различает сигналы по тону, если они отличаются не менее чем на 10 Гц. Определите, с какой минимальной скоростью приближался к платформе тепловоз, если человек смог различить сигналы (считайте, что $c = 300$ м/с). Ответ выразите в м/с.

T4.8. Перед отправкой тепловоз издал гудок с частотой

$$f_0 = 295 \text{ Гц.}$$

Чуть позже издал гудок подъезжающий к платформе тепловоз. Из-за эффекта Доплера частота второго гудка f больше первого: она зависит от скорости тепловоза по закону

$$f(v) = \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}},$$

где c — скорость звука в воздухе (в м/с). Человек, стоящий на платформе, различает сигналы по тону, если они отличаются не менее чем на 5 Гц. Определите, с какой минимальной скоростью приближался к платформе тепловоз, если человек смог различить сигналы (считайте, что $c = 300$ м/с). Ответ выразите в м/с.

T4.9. По закону Ома для полной цепи сила тока, измеряемая в амперах, равна

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r},$$

где ε — ЭДС источника (в вольтах), $r = 1$ Ом — его внутреннее сопротивление, R — сопротивление цепи (в омах). При каком наименьшем сопротивлении цепи сила тока будет составлять не более 20 % от силы тока короткого замыкания $I_{\text{кз}} = \frac{\varepsilon}{r}$? Ответ выразите в омах.

T4.7

--	--	--	--	--	--	--	--

T4.8

--	--	--	--	--	--	--	--

T4.9

--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Ответы:

T4.10

--	--	--	--	--	--	--	--

Тренировочная работа 4

T4.10. По закону Ома для полной цепи сила тока, измеряемая в амперах, равна

$$I = \frac{\varepsilon}{R + r},$$

где ε — ЭДС источника (в вольтах), $r = 2$ Ом — его внутреннее сопротивление, R — сопротивление цепи (в омах). При каком наименьшем сопротивлении цепи сила тока будет составлять не более 20 % от силы тока короткого замыкания $I_{\text{кз}} = \frac{\varepsilon}{r}$? Ответ выразите в омах.

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

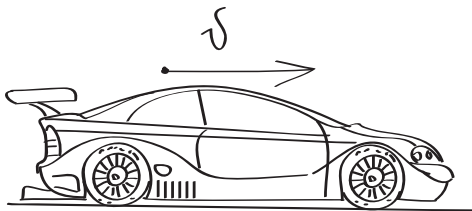
Задачи, приводящие к иррациональным уравнениям или неравенствам.

Решение задачи 5 диагностической работы

5. Скорость автомобиля, разгоняющегося с места старта по прямолинейному отрезку пути длиной l (в километрах) с постоянным ускорением a (в км/ч²), вычисляется по формуле

$$v = \sqrt{2la}.$$

Определите наименьшее ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав один километр, приобрести скорость не менее 100 км/ч. Ответ выразите в км/ч².



Решение. Найдём, при каком ускорении автомобиль достигнет требуемой скорости, проехав один километр. Задача сводится к решению уравнения $\sqrt{2la} = 100$ при известном значении длины пути $l = 1$ км:

$$\sqrt{2la} = 100 \Leftrightarrow \sqrt{2a} = 100 \Leftrightarrow 2a = 10\,000 \Leftrightarrow a = 5000 \text{ км/ч}^2.$$

Если ускорение будет превосходить найденное, то, проехав один километр, автомобиль наберёт бóльшую скорость, поэтому наименьшее необходимое ускорение равно 5000 км/ч².

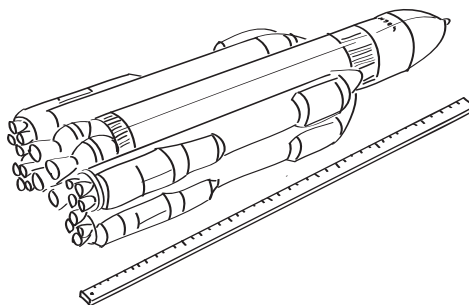
Ответ: 5000.

Рассмотрим ещё одну задачу.

5а. При движении ракеты её видимая для неподвижного наблюдателя длина, измеряемая в метрах, сокращается по закону

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

где $l_0 = 10$ м — длина покоящейся ракеты, $c = 3 \cdot 10^5$ км/с — скорость света, а v — скорость ракеты (в км/с). Какова должна быть минимальная скорость ракеты, чтобы её наблюдаемая длина стала не более 8 м? Ответ выразите в км/с.



Решение. Найдем, при какой скорости длина ракеты станет равна 8 м. Задача сводится к решению уравнения

$$l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} = 8$$

при заданном значении длины покоящейся ракеты $l_0 = 10$ м и известной величине скорости света $c = 3 \cdot 10^5$ км/с:

$$\begin{aligned} 10 \sqrt{1 - \frac{v^2}{9 \cdot 10^{10}}} = 8 &\Leftrightarrow \frac{v^2}{9 \cdot 10^{10}} = \frac{36}{100} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow v = \frac{6}{10} \cdot 3 \cdot 10^5 \Leftrightarrow v = 180\,000 \text{ км/с}. \end{aligned}$$

Если скорость будет превосходить найденную, то наблюдаемая длина ракеты будет менее 8 метров, поэтому минимальная необходимая скорость равна 180 000 км/с.

Ответ: 180 000.

Тренировочная работа 5

Т5.1. Скорость автомобиля, разгоняющегося с места старта по прямолинейному отрезку пути длиной l (в километрах) с постоянным ускорением a (в км/ч²), вычисляется по формуле

$$v = \sqrt{2la}.$$

Определите наименьшее ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав один километр, приобрести скорость не менее 110 км/ч. Ответ выразите в км/ч².

Т5.2. Скорость автомобиля, разгоняющегося с места старта по прямолинейному отрезку пути длиной l (в километрах) с постоянным ускорением a (в км/ч²), вычисляется по формуле

$$v = \sqrt{2la}.$$

Определите наименьшее ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав один километр, приобрести скорость не менее 120 км/ч. Ответ выразите в км/ч².

Т5.3. Скорость автомобиля, разгоняющегося с места старта по прямолинейному отрезку пути длиной l (в километрах) с постоянным ускорением a (в км/ч²), вычисляется по формуле

$$v = \sqrt{2la}.$$

Определите наименьшее ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав 0,9 километра, приобрести скорость не менее 90 км/ч. Ответ выразите в км/ч².

Т5.4. Скорость автомобиля, разгоняющегося с места старта по прямолинейному отрезку пути длиной l (в километрах) с постоянным ускорением a (в км/ч²), вычисляется по формуле

$$v = \sqrt{2la}.$$

Определите наименьшее ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав 0,8 километра, приобрести скорость не менее 100 км/ч. Ответ выразите в км/ч².

Ответы:

Т5.1

--	--	--	--	--	--	--	--

Т5.2

--	--	--	--	--	--	--	--

Т5.3

--	--	--	--	--	--	--	--

Т5.4

--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Ответы:

T5.5

--	--	--	--	--	--	--	--

T5.6

--	--	--	--	--	--	--	--

T5.7

--	--	--	--	--	--	--	--

T5.8

--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Тренировочная работа 5

T5.5. При движении ракеты её видимая для неподвижного наблюдателя длина, измеряемая в метрах, сокращается по закону

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

где $l_0 = 5$ м — длина покоящейся ракеты, $c = 3 \cdot 10^5$ км/с — скорость света, а v — скорость ракеты (в км/с). Какова должна быть минимальная скорость ракеты, чтобы её наблюдаемая длина стала не более 4 м? Ответ выразите в км/с.

T5.6. При движении ракеты её видимая для неподвижного наблюдателя длина, измеряемая в метрах, сокращается по закону

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

где $l_0 = 10$ м — длина покоящейся ракеты, $c = 3 \cdot 10^5$ км/с — скорость света, а v — скорость ракеты (в км/с). Какова должна быть минимальная скорость ракеты, чтобы её наблюдаемая длина стала не более 6 м? Ответ выразите в км/с.

T5.7. При движении ракеты её видимая для неподвижного наблюдателя длина, измеряемая в метрах, сокращается по закону

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

где $l_0 = 5$ м — длина покоящейся ракеты, $c = 3 \cdot 10^5$ км/с — скорость света, а v — скорость ракеты (в км/с). Какова должна быть минимальная скорость ракеты, чтобы её наблюдаемая длина стала не более 3 м? Ответ выразите в км/с.

T5.8. При движении ракеты её видимая для неподвижного наблюдателя длина, измеряемая в метрах, сокращается по закону

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

где $l_0 = 15$ м — длина покоящейся ракеты, $c = 3 \cdot 10^5$ км/с — скорость света, а v — скорость ракеты (в км/с). Какова должна быть минимальная скорость ракеты, чтобы её наблюдаемая длина стала не более 9 м? Ответ выразите в км/с.

Тренировочная работа 5

T5.9. Расстояние (в километрах) от наблюдателя, находящегося на небольшой высоте h км над землёй, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле

$$l = \sqrt{2Rh},$$

где $R = 6400$ км — радиус Земли. На какой наименьшей высоте следует располагаться наблюдателю, чтобы он видел горизонт на расстоянии не менее 4 километров? Ответ выразите в метрах.

T5.10. Расстояние (в километрах) от наблюдателя, находящегося на небольшой высоте h км над землёй, до наблюдаемой им линии горизонта вычисляется по формуле

$$l = \sqrt{2Rh},$$

где $R = 6400$ км — радиус Земли. На какой наименьшей высоте следует располагаться наблюдателю, чтобы он видел горизонт на расстоянии не менее 4,8 километра? Ответ выразите в метрах.

Ответы:

T5.9

--	--	--	--	--	--	--	--

T5.10

--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

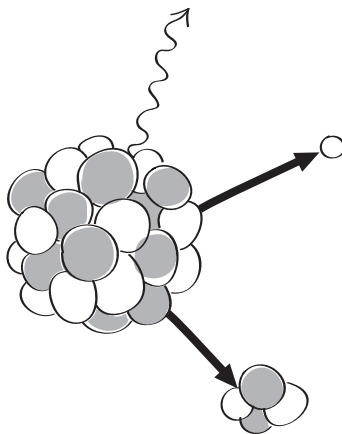
1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

**Задачи, приводящие к показательным
уравнениям или неравенствам.
Решение задачи 6 диагностической работы**

6. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону

$$m(t) = m_0 \cdot 2^{-t/T},$$

где m_0 — начальная масса изотопа, t — время, прошедшее от начала распада, T — период полураспада в минутах. В лаборатории получили вещество, содержащее $m_0 = 40$ мг изотопа азота-13, период полураспада которого $T = 10$ мин. В течение скольких минут масса изотопа азота-13 будет не меньше 10 мг?



Решение. Задача сводится к решению неравенства

$$m(t) \geq 10$$

при заданных значениях параметров $m_0 = 40$ мг и $T = 10$ мин:

$$40 \cdot 2^{-t/10} \geq 10 \Leftrightarrow 2^{-t/10} \geq 2^{-2} \Leftrightarrow -\frac{t}{10} \geq -2 \Leftrightarrow t \leq 20 \text{ мин.}$$

Ответ: 20.

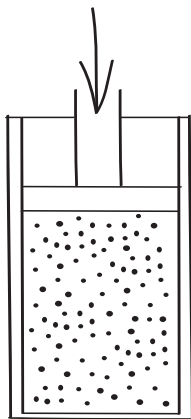
Решение задачи 6 диагностической работы

Рассмотрим ещё одну задачу.

6а. При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон

$$pV^k = \text{const},$$

где p (Па) — давление в газе, V — объём газа в кубических метрах. В ходе эксперимента с одноатомным идеальным газом (для него $k = \frac{5}{3}$) из начального состояния, в котором $\text{const} = 10^5 \text{ Па} \cdot \text{м}^5$, газ начинают сжимать. Какой наибольший объём V может занимать газ при давлениях p не меньше $3,2 \cdot 10^6 \text{ Па}$? Ответ выразите в кубических метрах.



Решение. Задача сводится к решению неравенства

$$p(V) \geq 3,2 \cdot 10^6$$

при заданных значениях параметров $k = \frac{5}{3}$ и $\text{const} = 10^5 \text{ Па} \cdot \text{м}^5$:

$$\begin{aligned} 10^5 \cdot V^{-5/3} \geq 3,2 \cdot 10^6 &\Leftrightarrow V^{5/3} \leq \frac{1}{32} \Leftrightarrow V \leq \left(\frac{1}{32}\right)^{3/5} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow V \leq \frac{1}{8} \text{ м}^3. \end{aligned}$$

Ответ: 0,125.

Ответы:

Т6.1

--	--	--	--	--	--	--	--

Т6.2

--	--	--	--	--	--	--	--

Т6.3

--	--	--	--	--	--	--	--

Т6.4

--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Тренировочная работа 6

Т6.1. При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон

$$pV^k = \text{const},$$

где p (Па) — давление в газе, V — объём газа в кубических метрах. В ходе эксперимента с одноатомным идеальным газом (для него $k = \frac{5}{3}$) из начального состояния, в котором $\text{const} = 200 \text{ Па} \cdot \text{м}^5$, газ начинают сжимать. Какой наибольший объём V может занимать газ при давлениях p не меньше $6,25 \cdot 10^5 \text{ Па}$? Ответ выразите в кубических метрах.

Т6.2. При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон

$$pV^k = \text{const},$$

где p (Па) — давление в газе, V — объём газа в кубических метрах. В ходе эксперимента с одноатомным идеальным газом (для него $k = \frac{5}{3}$) из начального состояния, в котором $\text{const} = 3,2 \cdot 10^4 \text{ Па} \cdot \text{м}^5$, газ начинают сжимать. Какой наибольший объём V может занимать газ при давлениях p не меньше $3,125 \cdot 10^6 \text{ Па}$? Ответ выразите в кубических метрах.

Т6.3. При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон

$$pV^k = \text{const},$$

где p (Па) — давление в газе, V — объём газа в кубических метрах. В ходе эксперимента с трёхатомным идеальным газом (для него $k = \frac{4}{3}$) из начального состояния, в котором $\text{const} = 10^5 \text{ Па} \cdot \text{м}^4$, газ начинают сжимать. Какой наибольший объём V может занимать газ при давлениях p не меньше $1,6 \cdot 10^6 \text{ Па}$? Ответ выразите в кубических метрах.

Т6.4. При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон

$$pV^k = \text{const},$$

где p (Па) — давление в газе, V — объём газа в кубических метрах. В ходе эксперимента с трёхатомным идеальным газом (для него $k = \frac{4}{3}$) из начального состояния, в котором $\text{const} = 2 \cdot 10^3 \text{ Па} \cdot \text{м}^4$, газ начинают сжимать. Какой наиболь-

Тренировочная работа 6

ший объём V может занимать газ при давлениях p не меньше $1,25 \cdot 10^6$ Па? Ответ выразите в кубических метрах.

Т6.5. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону

$$m(t) = m_0 \cdot 2^{-t/T},$$

где m_0 — начальная масса изотопа, t — время, прошедшее от начала распада, T — период полураспада в минутах. В лаборатории получили газ, содержащий $m_0 = 40$ мг изотопа азота-13, период полураспада которого $T = 10$ мин. В течение скольких минут масса изотопа азота-13 будет не меньше 5 мг?

Т6.6. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону

$$m(t) = m_0 \cdot 2^{-t/T},$$

где m_0 — начальная масса изотопа, t — время, прошедшее от начала распада, T — период полураспада в минутах. В лаборатории получили газ, содержащий $m_0 = 16$ мг изотопа азота-13, период полураспада которого $T = 10$ мин. В течение скольких минут масса изотопа азота-13 будет не меньше 2 мг?

Т6.7. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону

$$m(t) = m_0 \cdot 2^{-t/T},$$

где m_0 — начальная масса изотопа, t — время, прошедшее от начала распада, T — период полураспада в часах. В лаборатории получили вещество, содержащее $m_0 = 80$ мкг изотопа натрия-24, период полураспада которого $T = 15$ ч. В течение скольких часов масса изотопа натрия-24 будет не меньше 10 мкг?

Т6.8. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону

$$m(t) = m_0 \cdot 2^{-t/T},$$

где m_0 — начальная масса изотопа, t — время, прошедшее от начала распада, T — период полураспада в минутах. В лаборатории получили вещество, содержащее $m_0 = 40$ мг изотопа кислорода-15, период полураспада которого $T = 2$ мин. В течение скольких минут масса изотопа кислорода-15 будет не меньше 2,5 мг?

Ответы:

Т6.5

--	--	--	--	--	--	--	--

Т6.6

--	--	--	--	--	--	--	--

Т6.7

--	--	--	--	--	--	--	--

Т6.8

--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Ответы:

T6.9

--	--	--	--	--	--	--	--

T6.10

--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Тренировочная работа 6

T6.9. Уравнение процесса, в котором участвовал газ, записывается в виде

$$pV^a = \text{const},$$

где p (Па) — давление в газе, V — объём газа в кубических метрах, a — положительная константа. При каком наименьшем значении константы a уменьшение вдвое объёма газа, участвующего в этом процессе, приводит не менее чем к четырёхкратному увеличению давления?

T6.10. Уравнение процесса, в котором участвовал газ, записывается в виде

$$pV^a = \text{const},$$

где p (Па) — давление в газе, V — объём газа в кубических метрах, a — положительная константа. При каком наименьшем значении константы a уменьшение вчетверо объёма газа, участвующего в этом процессе, приводит не менее чем к двукратному увеличению давления?

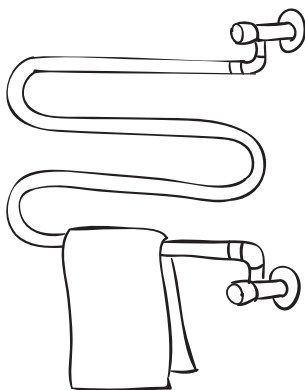
Задачи, приводящие к логарифмическим уравнениям или неравенствам.

Решение задачи 7 диагностической работы

7. Для обогрева помещения, температура в котором $T_{\text{п}} = 20^\circ\text{C}$, через радиатор пропускают горячую воду температурой $T_{\text{в}} = 60^\circ\text{C}$. Через радиатор проходит $m = 0,3$ кг/с воды. Проходя по радиатору расстояние $x = 84$ м, вода охлаждается до температуры T ($^\circ\text{C}$), причём

$$x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_{\text{в}} - T_{\text{п}}}{T - T_{\text{п}}},$$

где $c = 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$ — теплоёмкость воды, $\gamma = 21 \frac{\text{Вт}}{^\circ\text{C}}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 0,7$ — постоянная. До какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода?



Решение. Задача сводится к решению уравнения $x = 84$ при заданных значениях теплоёмкости, коэффициента теплообмена и постоянной α :

$$\begin{aligned} x = 84 &\Leftrightarrow \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_{\text{в}} - T_{\text{п}}}{T - T_{\text{п}}} = 84 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow 0,7 \cdot \frac{4200 \cdot 0,3}{21} \cdot \log_2 \frac{60 - 20}{T - 20} = 84 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \log_2 \frac{40}{T - 20} = 2 \Leftrightarrow \frac{40}{T - 20} = 4 \Leftrightarrow T - 20 = 10 \Leftrightarrow T = 30^\circ\text{C}. \end{aligned}$$

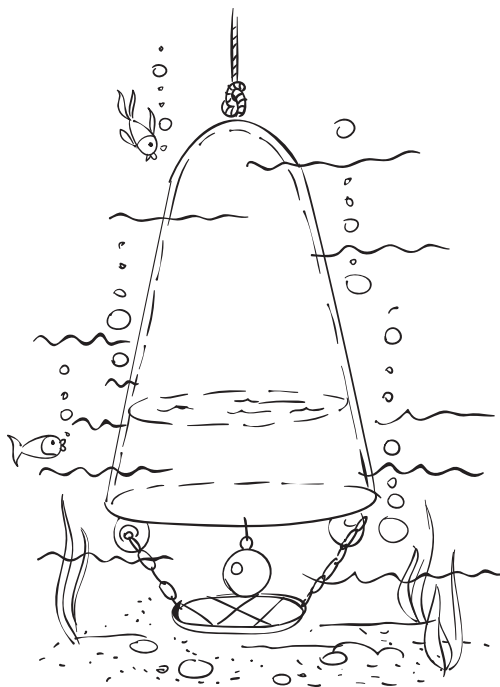
Ответ: 30.

Рассмотрим ещё одну задачу.

7а. Находящийся в воде водолазный колокол, содержащий $\nu = 4$ моля воздуха при давлении $p_1 = 1,2$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха. Работа (в джоулях), совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением

$$A = \alpha \nu T \log_2 \frac{p_2}{p_1},$$

где $\alpha = 5,75$ — постоянная, $T = 300$ К — температура воздуха, p_1 (атм) — начальное давление, а p_2 (атм) — конечное давление воздуха в колоколе. До какого наибольшего давления p_2 (в атм) можно сжать воздух в колоколе, если при сжатии воздуха совершается работа не более чем 20 700 Дж?



Решение. Задача сводится к решению неравенства $A \leq 20\,700$ при заданных значениях количества воздуха, его на-

Решение задачи 7 диагностической работы

чального давления и температуры, а также постоянной α :

$$A \leq 20\,700 \Leftrightarrow \alpha \nu T \log_2 \frac{p_2}{p_1} \leq 20\,700 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5,75 \cdot 4 \cdot 300 \cdot \log_2 \frac{p_2}{1,2} \leq 20\,700 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \log_2 \frac{p_2}{1,2} \leq 3 \Leftrightarrow 0 < \frac{p_2}{1,2} \leq 8 \Leftrightarrow 0 < p_2 \leq 9,6.$$

Ответ: 9,6.

Ответы:

Т7.1

--	--	--	--	--	--	--	--

Т7.1. Для обогрева помещения, температура в котором $T_{\text{п}} = 20^\circ\text{C}$, через радиатор пропускают горячую воду температурой $T_{\text{в}} = 100^\circ\text{C}$. Через радиатор проходит $m = 0,4$ кг/с воды. Проходя по радиатору расстояние $x = 84$ м, вода охлаждается до температуры T ($^\circ\text{C}$), причём

$$x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_{\text{в}} - T_{\text{п}}}{T - T_{\text{п}}},$$

где $c = 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$ — теплоёмкость воды, $\gamma = 42 \frac{\text{Вт}}{^\circ\text{C}}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 0,7$ — постоянная. До какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода?

Т7.2

--	--	--	--	--	--	--	--

Т7.2. Для обогрева помещения, температура в котором $T_{\text{п}} = 15^\circ\text{C}$, через радиатор пропускают горячую воду температурой $T_{\text{в}} = 65^\circ\text{C}$. Через радиатор проходит $m = 0,6$ кг/с воды. Проходя по радиатору расстояние $x = 28$ м, вода охлаждается до температуры T ($^\circ\text{C}$), причём

$$x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_{\text{в}} - T_{\text{п}}}{T - T_{\text{п}}},$$

где $c = 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$ — теплоёмкость воды, $\gamma = 63 \frac{\text{Вт}}{^\circ\text{C}}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 0,7$ — постоянная. До какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода?

Т7.3

--	--	--	--	--	--	--	--

Т7.3. Ёмкость высоковольтного конденсатора в телевизоре $C = 5 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 2 \cdot 10^6$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 18$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время (в секундах), определяемое выражением

$$t = \alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U},$$

где $\alpha = 1,1$ — постоянная. Определите наибольшее возможное напряжение на конденсаторе (в киловольтах), если после выключения телевизора прошло не менее 11 с.

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Т7.4. Ёмкость высоковольтного конденсатора в телевизоре $C = 3 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 5 \cdot 10^6$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 9$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время (в секундах), определяемое выражением

$$t = \alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U},$$

где $\alpha = 1,1$ — постоянная. Определите наибольшее возможное напряжение на конденсаторе (в киловольтах), если после выключения телевизора прошло не менее 33 с.

Т7.5. Ёмкость высоковольтного конденсатора в телевизоре $C = 5 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 4 \cdot 10^6$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 6$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время (в секундах), определяемое выражением

$$t = \alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U},$$

где $\alpha = 0,7$ — постоянная. Определите наибольшее возможное напряжение на конденсаторе (в киловольтах), если после выключения телевизора прошло не менее 14 с.

Т7.6. Ёмкость высоковольтного конденсатора в телевизоре $C = 6 \cdot 10^{-6}$ Ф. Параллельно с конденсатором подключён резистор с сопротивлением $R = 5 \cdot 10^6$ Ом. Во время работы телевизора напряжение на конденсаторе $U_0 = 8$ кВ. После выключения телевизора напряжение на конденсаторе убывает до значения U (кВ) за время (в секундах), определяемое выражением

$$t = \alpha RC \log_2 \frac{U_0}{U},$$

где $\alpha = 0,7$ — постоянная. Определите наибольшее возможное напряжение на конденсаторе (в киловольтах), если после выключения телевизора прошло не менее 42 с.

Т7.4

--	--	--	--	--	--	--	--

Т7.5

--	--	--	--	--	--	--	--

Т7.6

--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Ответы:

Тренировочная работа 7

T7.7

--	--	--	--	--	--	--	--

T7.7. Находящийся в воде водолазный колокол, содержащий в начальный момент времени $\nu = 2$ моля воздуха объемом $V_1 = 40$ л, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного объёма V_2 . Работа (в джоулях), совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением

$$A = \alpha \nu T \log_2 \frac{V_1}{V_2},$$

где $\alpha = 5,75$ — постоянная, а $T = 300$ К — температура воздуха. Какой объём V_2 (в литрах) станет занимать воздух, если при сжатии газа была совершена работа в 10 350 Дж?

T7.8

--	--	--	--	--	--	--	--

T7.8. Находящийся в воде водолазный колокол, содержащий в начальный момент времени $\nu = 4$ моля воздуха объемом $V_1 = 60$ л, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного объёма V_2 . Работа (в джоулях), совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением

$$A = \alpha \nu T \log_2 \frac{V_1}{V_2},$$

где $\alpha = 5,75$ — постоянная, а $T = 300$ К — температура воздуха. Какой объём V_2 (в литрах) станет занимать воздух, если при сжатии газа была совершена работа в 6900 Дж?

T7.9

--	--	--	--	--	--	--	--

T7.9. Находящийся в воде водолазный колокол, содержащий $\nu = 2$ моля воздуха при давлении $p_1 = 1,5$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха. Работа (в джоулях), совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением

$$A = \alpha \nu T \log_2 \frac{p_2}{p_1},$$

где $\alpha = 5,75$ — постоянная, $T = 300$ К — температура воздуха, p_1 (атм) — начальное давление, а p_2 (атм) — конечное давление воздуха в колоколе. До какого наибольшего давления p_2 (в атм) можно сжать воздух в колоколе, если при сжатии воздуха совершается работа не более чем 6900 Дж?

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	,	
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	--

Т7.10. Находящийся в воде водолазный колокол, содержащий $\nu = 6$ молей воздуха при давлении $p_1 = 2,5$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха. Работа (в джоулях), совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением

$$A = \alpha \nu T \log_2 \frac{p_2}{p_1},$$

где $\alpha = 5,75$ — постоянная, $T = 300$ К — температура воздуха, p_1 (атм) — начальное давление, а p_2 (атм) — конечное давление воздуха в колоколе. До какого наибольшего давления p_2 (в атм) можно сжать воздух в колоколе, если при сжатии воздуха совершается работа не более чем 10 350 Дж?

Т7.10

--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

**Задачи, приводящие к тригонометрическим
уравнениям или неравенствам.
Решения задач 8—10 диагностической работы**

8. При бросании мяча под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли его время в полёте, выраженное в секундах, равно

$$t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$

При каком наименьшем значении угла α (в градусах) время в полёте будет не меньше 3 секунд, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 30$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².



Решение. Задача сводится к решению неравенства

$$t(\alpha) \geq 3$$

на интервале $(0^\circ; 90^\circ)$ при заданных значениях начальной скорости $v_0 = 30$ м/с и ускорения свободного падения $g = 10$ м/с²:

$$\frac{2 \cdot 30 \cdot \sin \alpha}{10} \geq 3 \Leftrightarrow \sin \alpha \geq \frac{1}{2} \quad \begin{matrix} 0^\circ < \alpha < 90^\circ \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \quad 30^\circ \leq \alpha < 90^\circ.$$

Ответ: 30.

9. На рельсах стоит платформа. Скейтбордист прыгает на неё со скоростью $v = 3$ м/с под острым углом α к рельсам. От толчка платформа начинает ехать со скоростью

$$u = \frac{m}{m+M} v \cos \alpha,$$

где $m = 80$ кг — масса скейтбордиста со скейтом, а $M = 400$ кг — масса платформы. Под каким наибольшим углом α (в градусах) нужно прыгать, чтобы разогнать платформу до скорости не менее чем 0,25 м/с?



Решение. Задача сводится к решению неравенства

$$u \geq 0,25$$

на интервале $(0^\circ; 90^\circ)$ при заданных значениях массы скейтбордиста $m = 80$ кг и массы платформы $M = 400$ кг:

$$\begin{aligned} u \geq 0,25 &\Leftrightarrow \frac{m}{m+M} v \cos \alpha \geq 0,25 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{80}{80+400} \cdot 3 \cdot \cos \alpha \geq 0,25 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \cos \alpha \geq \frac{1}{4} \quad \begin{matrix} 0^\circ < \alpha < 90^\circ \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \quad 0^\circ < \alpha \leq 60^\circ. \end{aligned}$$

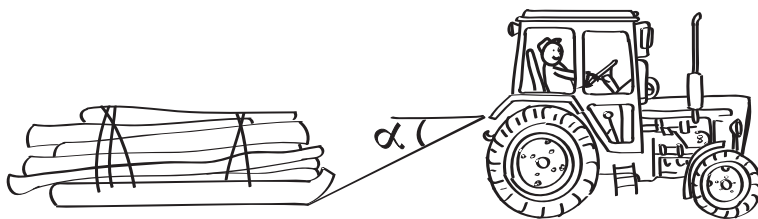
Ответ: 60.

Рассмотрим ещё одну задачу.

9а. Трактор тащит сани с силой $F = 80$ кН, направленной под острым углом α к горизонту. Работа трактора, выраженная в килоджоулях, на участке длиной $S = 50$ м равна

$$A = FS \cos \alpha.$$

При каком максимальном угле α (в градусах) совершённая работа будет не менее 2000 кДж?



Решение. Задача сводится к решению неравенства

$$A \geq 2000$$

на интервале $(0^\circ; 90^\circ)$ при заданных значениях силы $F = 80$ кН и длины пути $S = 50$ м:

$$A \geq 2000 \Leftrightarrow 80 \cdot 50 \cdot \cos \alpha \geq 2000 \Leftrightarrow$$

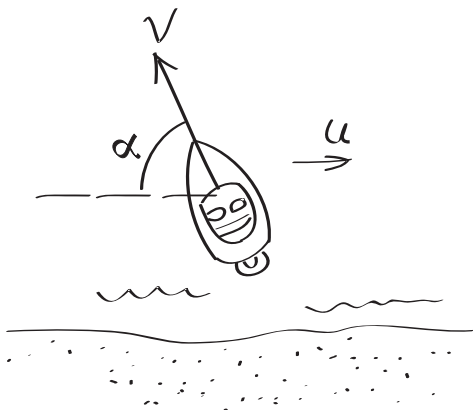
$$\Leftrightarrow \cos \alpha \geq \frac{1}{2} \quad \begin{matrix} 0^\circ < \alpha < 90^\circ \\ \Leftrightarrow \end{matrix} \quad 0^\circ < \alpha \leq 60^\circ.$$

Ответ: 60.

10. Катер должен пересечь реку шириной $L = 100$ м так, чтобы причалить точно напротив места отправления. Скорость течения реки $u = 0,5$ м/с. Время в пути, измеряемое в секундах, равно

$$t = \frac{L}{u} \operatorname{ctg} \alpha,$$

где α — острый угол между осью катера и линией берега. Под каким минимальным углом α к берегу нужно направить катер, чтобы время в пути было не больше 200 с? Ответ дайте в градусах.



Решение. Задача сводится к решению неравенства

$$\frac{L}{u} \operatorname{ctg} \alpha \leq 200$$

на интервале $(0^\circ; 90^\circ)$ при заданных значениях ширины реки $L = 100$ м и скорости течения $u = 0,5$ м/с:

$$\frac{100}{0,5} \operatorname{ctg} \alpha \leq 200 \Leftrightarrow \operatorname{ctg} \alpha \leq 1 \stackrel{0^\circ < \alpha < 90^\circ}{\Leftrightarrow} 45^\circ \leq \alpha < 90^\circ.$$

Ответ: 45.

Ответы:

T8.1

--	--	--	--	--	--	--	--

T8.2

--	--	--	--	--	--	--	--

T8.3

--	--	--	--	--	--	--	--

T8.4

--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Тренировочная работа 8

T8.1. При бросании мяча под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли его время в полёте, выраженное в секундах, равно

$$t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$

При каком наименьшем значении угла α (в градусах) время в полёте будет не меньше 2 секунд, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 20$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

T8.2. При бросании мяча под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли его время в полёте, выраженное в секундах, равно

$$t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$

При каком наименьшем значении угла α (в градусах) время в полёте будет не меньше одной секунды, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 10$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

T8.3. При бросании мяча под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли его время в полёте, выраженное в секундах, равно

$$t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$

При каком наименьшем значении угла α (в градусах) время в полёте будет не меньше 1,5 секунд, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 15$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

T8.4. При бросании мяча под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли его время в полёте, выраженное в секундах, равно

$$t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$

При каком наименьшем значении угла α (в градусах) время в полёте будет не меньше 1,6 секунд, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 16$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

Ответы:

Тренировочная работа 8

T8.10

--	--	--	--	--	--	--	--

T8.10. На рельсах стоит платформа. Скейтбордист прыгает на неё со скоростью $v = 6$ м/с под острым углом α к рельсам. От толчка платформа начинает ехать со скоростью

$$u = \frac{m}{m+M} v \cos \alpha,$$

где $m = 75$ кг — масса скейтбордиста со скейтом, а $M = 375$ кг — масса платформы. Под каким наибольшим углом α (в градусах) нужно прыгать, чтобы разогнать платформу до скорости не менее чем 0,5 м/с?

T8.11

--	--	--	--	--	--	--	--

T8.11. На рельсах стоит платформа. Скейтбордист прыгает на неё со скоростью $v = 3,2$ м/с под острым углом α к рельсам. От толчка платформа начинает ехать со скоростью

$$u = \frac{m}{m+M} v \cos \alpha,$$

где $m = 75$ кг — масса скейтбордиста со скейтом, а $M = 325$ кг — масса платформы. Под каким наибольшим углом α (в градусах) нужно прыгать, чтобы разогнать платформу до скорости не менее чем 0,3 м/с?

T8.12

--	--	--	--	--	--	--	--

T8.12. На рельсах стоит платформа. Скейтбордист прыгает на неё со скоростью $v = 5$ м/с под острым углом α к рельсам. От толчка платформа начинает ехать со скоростью

$$u = \frac{m}{m+M} v \cos \alpha,$$

где $m = 80$ кг — масса скейтбордиста со скейтом, а $M = 320$ кг — масса платформы. Под каким наибольшим углом α (в градусах) нужно прыгать, чтобы разогнать платформу до скорости не менее чем 0,5 м/с?

T8.13

--	--	--	--	--	--	--	--

T8.13. Катер должен пересечь реку шириной $L = 80$ м так, чтобы причалить точно напротив места отправления. Скорость течения реки $u = 2$ м/с. Время в пути, измеряемое в секундах, равно

$$t = \frac{L}{u} \operatorname{ctg} \alpha,$$

где α — острый угол между осью катера и линией берега (см. рис. на с. 59). Под каким минимальным углом α к берегу нужно направить катер, чтобы время в пути было не больше 40 с? Ответ дайте в градусах.

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	,	
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	--

T8.14. Катер должен пересечь реку шириной $L = 70$ м так, чтобы причалить точно напротив места отправления. Скорость течения реки $u = 0,5$ м/с. Время в пути, измеряемое в секундах, равно

$$t = \frac{L}{u} \operatorname{ctg} \alpha,$$

где α — острый угол между осью катера и линией берега (см. рис. на с. 59). Под каким минимальным углом α к берегу нужно направить катер, чтобы время в пути было не больше 140 с? Ответ дайте в градусах.

T8.15. Катер должен пересечь реку шириной $L = 120$ м так, чтобы причалить точно напротив места отправления. Скорость течения реки $u = 0,6$ м/с. Время в пути, измеряемое в секундах, равно

$$t = \frac{L}{u} \operatorname{ctg} \alpha,$$

где α — острый угол между осью катера и линией берега (см. рис. на с. 59). Под каким минимальным углом α к берегу нужно направить катер, чтобы время в пути было не больше 200 с? Ответ дайте в градусах.

T8.16. Катер должен пересечь реку шириной $L = 75$ м так, чтобы причалить точно напротив места отправления. Скорость течения реки $u = 0,5$ м/с. Время в пути, измеряемое в секундах, равно

$$t = \frac{L}{u} \operatorname{ctg} \alpha,$$

где α — острый угол между осью катера и линией берега (см. рис. на с. 59). Под каким минимальным углом α к берегу нужно направить катер, чтобы время в пути было не больше 150 с? Ответ дайте в градусах.

T8.17. Датчик сконструирован таким образом, что его антенна ловит радиосигнал, который затем преобразуется в электрический сигнал, изменяющийся со временем по закону

$$U = U_0 \sin(\omega t + \varphi),$$

где t — время в секундах, $U_0 = 2$ В — амплитуда, $\omega = 150^\circ/\text{с}$ — частота, $\varphi = -30^\circ$ — фаза. Датчик настроен так, что если напряжение в нём не ниже 1 В, то загорается лампочка. Какую часть времени (в процентах) на протяжении первой секунды после начала работы лампочка будет гореть?

T8.14

--	--	--	--	--	--	--	--

T8.15

--	--	--	--	--	--	--	--

T8.16

--	--	--	--	--	--	--	--

T8.17

--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Ответы:

T8.18

--	--	--	--	--	--	--	--

T8.19

--	--	--	--	--	--	--	--

T8.20

--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Тренировочная работа 8

T8.18. Датчик сконструирован таким образом, что его антенна ловит радиосигнал, который затем преобразуется в электрический сигнал, изменяющийся со временем по закону

$$U = U_0 \sin(\omega t + \varphi),$$

где t — время в секундах, $U_0 = 2$ В — амплитуда, $\omega = 240^\circ/\text{с}$ — частота, $\varphi = -30^\circ$ — фаза. Датчик настроен так, что если напряжение в нём не ниже 1 В, то загорается лампочка. Какую часть времени (в процентах) на протяжении первой секунды после начала работы лампочка будет гореть?

T8.19. Очень лёгкий заряженный металлический шарик с зарядом $q = 2 \cdot 10^{-6}$ Кл скатывается по гладкой наклонной плоскости. В момент, когда его скорость составляет $v = 6$ м/с, на него начинает действовать постоянное магнитное поле, вектор индукции B которого лежит в той же плоскости и составляет угол α с направлением движения шарика. Значение индукции поля $B = 5 \cdot 10^{-3}$ Тл. При этом на шарик действует сила Лоренца, направленная вверх перпендикулярно плоскости и равная $F_L = qvB \sin \alpha$ (Н). При каком наименьшем значении угла $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$ шарик оторвётся от поверхности, если для этого нужно, чтобы сила F_L была больше $3 \cdot 10^{-8}$ Н?

T8.20. Очень лёгкий заряженный металлический шарик с зарядом $q = 5 \cdot 10^{-6}$ Кл скатывается по гладкой наклонной плоскости. В момент, когда его скорость составляет $v = 6$ м/с, на него начинает действовать постоянное магнитное поле, вектор индукции B которого лежит в той же плоскости и составляет угол α с направлением движения шарика. Значение индукции поля $B = 6 \cdot 10^{-3}$ Тл. При этом на шарик действует сила Лоренца, направленная вверх перпендикулярно плоскости и равная $F_L = qvB \sin \alpha$ (Н). При каком наименьшем значении угла $\alpha \in [0^\circ; 180^\circ]$ шарик оторвётся от поверхности, если для этого нужно, чтобы сила F_L была больше $9 \cdot 10^{-8}$ Н?

Диагностическая работа 1

Ответами на задания проверочных работ должны быть целые числа или конечные десятичные дроби. Единицы измерений в ответы писать не нужно.

Д1.1. При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0 = 15$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону

$$l(t^{\circ}) = l_0(1 + \alpha \cdot t^{\circ}),$$

где $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} (^{\circ}\text{C})^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 9 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

Д1.2. Зависимость объёма спроса q на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб.) задаётся формулой

$$q = 130 - 10p.$$

Выручка предприятия за месяц r (в тыс. руб.) определяется как $r(p) = q \cdot p$. Определите максимальный уровень цены p , при котором месячная выручка $r(p)$ составит не менее 360 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

Д1.3. На верфи инженеры проектируют новый аппарат для погружения на небольшие глубины. Конструкция имеет кубическую форму, а значит, сила Архимеда, действующая на аппарат, будет определяться по формуле

$$F_A = \rho g l^3,$$

где $\rho = 1000 \text{ кг/м}^3$ — плотность воды, l — линейный размер аппарата в метрах, а g — ускорение свободного падения (считайте, что $g = 9,8 \text{ Н/кг}$). Каковы могут быть максимальные линейные размеры аппарата, чтобы обеспечить его эксплуатацию в условиях, когда выталкивающая сила при погружении не будет превосходить 78,4 Н? Ответ выразите в метрах.

Д1.4. Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием $f = 40$ см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 40 до 60 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах

Ответы:

Д1.1

--	--	--	--	--	--	--	--

Д1.2

--	--	--	--	--	--	--	--

Д1.3

--	--	--	--	--	--	--	--

Д1.4

--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Ответы:

Диагностическая работа 1

от 200 до 240 см. Изображение на экране будет чётким, если выполнено соотношение

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}.$$

Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы можно поместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким. Ответ выразите в сантиметрах.

Д1.5. Скорость автомобиля, разгоняющегося с места старта по прямолинейному отрезку пути длиной l (в километрах) с постоянным ускорением a (в км/ч²), вычисляется по формуле

$$v = \sqrt{2la}.$$

Определите наименьшее ускорение, с которым должен двигаться автомобиль, чтобы, проехав 0,4 километра, приобрести скорость не менее 100 км/ч. Ответ выразите в км/ч².

Д1.6. При адиабатическом процессе для идеального газа выполняется закон

$$pV^k = \text{const},$$

где p (Па) — давление в газе, V — объём газа в кубических метрах. В ходе эксперимента с трёхатомным идеальным газом (для него $k = \frac{4}{3}$) из начального состояния, в котором $\text{const} = 1,6 \cdot 10^5 \text{ Па} \cdot \text{м}^4$, газ начинают сжимать. Какой наибольший объём V может занимать газ при давлениях p не меньше $6,25 \cdot 10^6 \text{ Па}$? Ответ выразите в кубических метрах.

Д1.7. Для обогрева помещения, температура в котором $T_n = 25^\circ\text{C}$, через радиатор пропускают горячую воду температурой $T_b = 49^\circ\text{C}$. Через радиатор проходит $m = 0,3 \text{ кг/с}$ воды. Проходя по радиатору расстояние $x = 66 \text{ м}$, вода охлаждается до температуры T ($^\circ\text{C}$), причём

$$x = \alpha \frac{cm}{\gamma} \log_2 \frac{T_b - T_n}{T - T_n},$$

где $c = 4200 \frac{\text{Дж}}{\text{кг} \cdot ^\circ\text{C}}$ — теплоёмкость воды, $\gamma = 21 \frac{\text{Вт}}{^\circ\text{C}}$ — коэффициент теплообмена, а $\alpha = 1,1$ — постоянная. До какой температуры (в градусах Цельсия) охладится вода?

Д1.5

--	--	--	--	--	--	--	--

Д1.6

--	--	--	--	--	--	--	--

Д1.7

--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Д1.8. При бросании мяча под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли его время в полёте, выраженное в секундах, равно

$$t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$

При каком наименьшем значении угла α (в градусах) время в полёте будет не меньше 2,4 секунды, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 24$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

Д1.9. Трактор тащит сани с силой $F = 80$ кН, направленной под острым углом α к горизонту. Работа трактора, выраженная в килоджоулях, на участке длиной $S = 80$ м равна

$$A = FS \cos \alpha.$$

При каком максимальном угле α (в градусах) совершённая работа будет не менее 3200 кДж?

Д1.10. Катер должен пересечь реку шириной $L = 60$ м так, чтобы причалить точно напротив места отправления. Скорость течения реки $u = 0,3$ м/с. Время в пути, измеряемое в секундах, равно

$$t = \frac{L}{u} \operatorname{ctg} \alpha,$$

где α — острый угол между осью катера и линией берега (см. рис. на с. 59). Под каким минимальным углом α к берегу нужно направить катер, чтобы время в пути было не больше 200 с? Ответ дайте в градусах.

Ответы:

Д1.8

--	--	--	--	--	--	--	--

Д1.9

--	--	--	--	--	--	--	--

Д1.10

--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Ответы:

Д2.1

--	--	--	--	--	--	--	--

Д2.2

--	--	--	--	--	--	--	--

Д2.3

--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	,	
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	--

Диагностическая работа 2

Д2.1. Зависимость объёма спроса q на продукцию предприятия-монополиста от цены p (тыс. руб.) задаётся формулой

$$q = 75 - 5p.$$

Выручка предприятия за месяц r (в тыс. руб.) определяется как $r(p) = q \cdot p$. Определите максимальный уровень цены p , при котором месячная выручка $r(p)$ составит не менее 270 тыс. руб. Ответ приведите в тыс. руб.

Д2.2. Если достаточно быстро вращать ведро с водой на верёвке в вертикальной плоскости, то вода не будет выливаться. При вращении ведёрка сила давления воды на дно не остаётся постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила её давления на дно будет положительной во всех точках траектории, кроме верхней, где она может быть равной нулю. В верхней точке сила давления, выраженная в ньютонах, равна

$$P = m \left(\frac{v^2}{L} - g \right),$$

где m — масса воды в килограммах, v — скорость движения ведёрка, L — длина верёвки в метрах, g — ускорение свободного падения (считайте, что $g = 10 \text{ м/с}^2$). С какой минимальной скоростью надо вращать ведро, чтобы вода не выливалась, если длина верёвки равна 1,6 м? Ответ выразите в м/с.

Д2.3. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана—Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела P , измеряемая в ваттах, прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры:

$$P = \sigma S T^4,$$

где $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$ — постоянная, площадь S измеряется в квадратных метрах, температура T — в градусах Кельвина, а мощность P — в ваттах. Известно, что некоторая звезда имеет площадь поверхности $S = \frac{1}{125} \cdot 10^{20} \text{ м}^2$, а излучаемая ею мощность P не менее $4,56 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$. Определите наименьшую возможную температуру этой звезды. Приведите ответ в градусах Кельвина.

Д2.4. Перед отправкой тепловоз издал гудок с частотой $f_0 = 390$ Гц. Чуть позже издал гудок подъезжающий к платформе тепловоз. Из-за эффекта Доплера частота второго гудка f больше первого: она зависит от скорости тепловоза по закону

$$f(v) = \frac{f_0}{1 - \frac{v}{c}},$$

где c — скорость звука в воздухе (в м/с). Человек, стоящий на платформе, различает сигналы по тону, если они отличаются не менее чем на 10 Гц. Определите, с какой минимальной скоростью приближался к платформе тепловоз, если человек смог различить сигналы. Считайте, что $c = 320$ м/с. Ответ выразите в м/с.

Д2.5. При движении ракеты её видимая для неподвижного наблюдателя длина, измеряемая в метрах, сокращается по закону

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

где $l_0 = 25$ м — длина покоящейся ракеты, $c = 3 \cdot 10^5$ км/с — скорость света, а v — скорость ракеты (в км/с). Какова должна быть минимальная скорость ракеты, чтобы её наблюдаемая длина стала не более 24 м? Ответ выразите в км/с.

Д2.6. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону

$$m(t) = m_0 \cdot 2^{-t/T},$$

где m_0 — начальная масса изотопа, t — время, прошедшее от начала распада, T — период полураспада в минутах. В лаборатории получили вещество, содержащее $m_0 = 20$ мг изотопа кислорода-15, период полураспада которого $T = 2$ мин. В течение скольких минут масса изотопа кислорода-15 будет не меньше 10 мг?

Д2.7. Находящийся в воде водолазный колокол, содержащий в начальный момент времени $v = 2$ моля воздуха объёмом $V_1 = 18$ л, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха до конечного объё-

Ответы:

Д2.4

--	--	--	--	--	--	--	--

Д2.5

--	--	--	--	--	--	--	--

Д2.6

--	--	--	--	--	--	--	--

Д2.7

--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Ответы:

Диагностическая работа 2

ма V_2 . Работа (в джоулях), совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением

$$A = \alpha \nu T \log_2 \frac{V_1}{V_2},$$

где $\alpha = 9,15$ — постоянная, а $T = 300$ К — температура воздуха. Какой объём V_2 (в литрах) станет занимать воздух, если при сжатии газа была совершена работа в 10 980 Дж?

Д2.8. При бросании мяча под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли его время в полёте, выраженное в секундах, равно

$$t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$

При каком наименьшем значении угла α (в градусах) время в полёте будет не меньше 1,9 секунд, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 19$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

Д2.9. На рельсах стоит платформа. Скейтбордист прыгает на неё со скоростью $v = 8$ м/с под острым углом α к рельсам. От толчка платформа начинает ехать со скоростью

$$u = \frac{m}{m+M} v \cos \alpha,$$

где $m = 70$ кг — масса скейтбордиста со скейтом, а $M = 490$ кг — масса платформы. Под каким наибольшим углом α (в градусах) нужно прыгать, чтобы разогнать платформу до скорости не менее чем 0,5 м/с?

Д2.10. Катер должен пересечь реку шириной $L = 90$ м так, чтобы причалить точно напротив места отправления. Скорость течения реки $u = 1,5$ м/с. Время в пути, измеряемое в секундах, равно

$$t = \frac{L}{u} \operatorname{ctg} \alpha,$$

где α — острый угол между осью катера и линией берега (см. рис. на с. 59). Под каким минимальным углом α к берегу нужно направить катер, чтобы время в пути было не больше 60 с? Ответ дайте в градусах.

Д2.8

--	--	--	--	--	--	--	--

Д2.9

--	--	--	--	--	--	--	--

Д2.10

--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Диагностическая работа 3

Д3.1. При температуре 0°C рельс имеет длину $l_0 = 20$ м. При возрастании температуры происходит тепловое расширение рельса и его длина, выраженная в метрах, меняется по закону

$$l(t^\circ) = l_0(1 + \alpha \cdot t^\circ),$$

где $\alpha = 1,2 \cdot 10^{-5} (\text{C}^\circ)^{-1}$ — коэффициент теплового расширения, t° — температура (в градусах Цельсия). При какой температуре рельс удлинится на 6 мм? Ответ выразите в градусах Цельсия.

Д3.2. Если достаточно быстро вращать ведёрко с водой на верёвке в вертикальной плоскости, то вода не будет выливаться. При вращении ведёрка сила давления воды на дно не остаётся постоянной: она максимальна в нижней точке и минимальна в верхней. Вода не будет выливаться, если сила её давления на дно будет положительной во всех точках траектории, кроме верхней, где она может быть равной нулю. В верхней точке сила давления, выраженная в ньютонах, равна

$$P = m \left(\frac{v^2}{L} - g \right),$$

где m — масса воды в килограммах, v — скорость движения ведёрка в м/с, L — длина верёвки в метрах, g — ускорение свободного падения (считайте, что $g = 10 \text{ м/с}^2$). С какой минимальной скоростью надо вращать ведёрко, чтобы вода не выливалась, если длина верёвки равна 1,225 м? Ответ выразите в м/с.

Д3.3. Для определения эффективной температуры звёзд используют закон Стефана—Больцмана, согласно которому мощность излучения нагретого тела P , измеряемая в ваттах, прямо пропорциональна площади его поверхности и четвёртой степени температуры:

$$P = \sigma S T^4,$$

где $\sigma = 5,7 \cdot 10^{-8} \frac{\text{Вт}}{\text{м}^2 \cdot \text{К}^4}$ — постоянная, площадь S измеряется в квадратных метрах, температура T — в градусах Кельвина, а мощность P — в ваттах. Известно, что некоторая звезда имеет площадь поверхности $S = \frac{1}{648} \cdot 10^{20} \text{ м}^2$, а излучаемая ею мощность P не менее $1,824 \cdot 10^{26} \text{ Вт}$. Определите наименьшую возможную температуру этой звезды. Приведите ответ в градусах Кельвина.

Ответы:

Д3.1

--	--	--	--	--	--	--	--

Д3.2

--	--	--	--	--	--	--	--

Д3.3

--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Ответы:

Д3.4

--	--	--	--	--	--	--	--

Д3.5

--	--	--	--	--	--	--	--

Д3.6

--	--	--	--	--	--	--	--

Д3.7

--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Диагностическая работа 3

Д3.4. Для получения на экране увеличенного изображения лампочки в лаборатории используется собирающая линза с главным фокусным расстоянием $f = 50$ см. Расстояние d_1 от линзы до лампочки может изменяться в пределах от 60 до 80 см, а расстояние d_2 от линзы до экрана — в пределах от 120 до 150 см. Изображение на экране будет чётким, если выполнено соотношение

$$\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2} = \frac{1}{f}.$$

Укажите, на каком наименьшем расстоянии от линзы можно поместить лампочку, чтобы её изображение на экране было чётким. Ответ выразите в сантиметрах.

Д3.5. При движении ракеты её видимая для неподвижного наблюдателя длина, измеряемая в метрах, сокращается по закону

$$l = l_0 \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}},$$

где $l_0 = 50$ м — длина покоящейся ракеты, $c = 3 \cdot 10^5$ км/с — скорость света, а v — скорость ракеты (в км/с). Какова должна быть минимальная скорость ракеты, чтобы её наблюдаемая длина стала не более 48 м? Ответ выразите в км/с.

Д3.6. В ходе распада радиоактивного изотопа его масса уменьшается по закону

$$m(t) = m_0 \cdot 2^{-t/T},$$

где m_0 — начальная масса изотопа, t — время, прошедшее от начала распада, T — период полураспада в минутах. В лаборатории получили вещество, содержащее $m_0 = 100$ мкг изотопа кислорода-15, период полураспада которого $T = 2$ мин. В течение скольких минут масса изотопа кислорода-15 будет не меньше 12,5 мкг?

Д3.7. Находящийся в воде водолазный колокол, содержащий $v = 4$ моля воздуха при давлении $p_1 = 1,5$ атмосферы, медленно опускают на дно водоёма. При этом происходит изотермическое сжатие воздуха. Работа (в джоулях), совершаемая водой при сжатии воздуха, определяется выражением

$$A = \alpha v T \log_2 \frac{p_2}{p_1},$$

где $\alpha = 9,15$ — постоянная, $T = 300$ К — температура воздуха, p_1 (атм) — начальное давление, а p_2 (атм) — конечное давление воздуха в колоколе. До какого наибольшего давления p_2 (в атм) можно сжать воздух в колоколе, если при сжатии воздуха совершается работа не более чем 10 980 Дж?

Д3.8. При бросании мяча под острым углом α к плоской горизонтальной поверхности земли его время в полёте, выраженное в секундах, равно

$$t = \frac{2v_0 \sin \alpha}{g}.$$

При каком наименьшем значении угла α (в градусах) время в полёте будет не меньше 2,5 секунд, если мяч бросают с начальной скоростью $v_0 = 25$ м/с? Считайте, что ускорение свободного падения $g = 10$ м/с².

Д3.9. На рельсах стоит платформа. Скейтбордист прыгает на неё со скоростью $v = 6$ м/с под острым углом α к рельсам. От толчка платформа начинает ехать со скоростью

$$u = \frac{m}{m + M} v \cos \alpha,$$

где $m = 70$ кг — масса скейтбордиста со скейтом, а $M = 350$ кг — масса платформы. Под каким наибольшим углом α (в градусах) нужно прыгать, чтобы разогнать платформу до скорости не менее чем 0,5 м/с?

Д3.10. Катер должен пересечь реку шириной $L = 100$ м так, чтобы причалить точно напротив места отправления. Скорость течения реки $u = 0,8$ м/с. Время в пути, измеряемое в секундах, равно

$$t = \frac{L}{u} \operatorname{ctg} \alpha,$$

где α — острый угол между осью катера и линией берега (см. рис. на с. 59). Под каким минимальным углом α к берегу нужно направить катер, чтобы время в пути было не больше 125 с? Ответ дайте в градусах.

Д3.8

--	--	--	--	--	--	--	--

Д3.9

--	--	--	--	--	--	--	--

Д3.10

--	--	--	--	--	--	--	--

Образец написания:

1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	,
---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---	---

Ответы

Диагностическая работа

1. 25. 2. 90. 3. 4000. 4. 7. 5. 5000. 6. 20. 7. 30. 8. 30. 9. 60. 10. 45.

Тренировочная работа 1

T1.1. 37,5. T1.2. 50. T1.3. 75. T1.4. 25. T1.5. 4000. T1.6. 5000. T1.7. 4000.
T1.8. 3000. T1.9. 1. T1.10. 1,4.

Тренировочная работа 2

T2.1. 8. T2.2. 12. T2.3. 8. T2.4. 10. T2.5. 2. T2.6. 2,5. T2.7. 2,7. T2.8. 2,8.
T2.9. 60. T2.10. 120. T2.11. 50. T2.12. 25. T2.13. 1,4. T2.14. 1,6. T2.15. 1,8.
T2.16. 2. T2.17. 500. T2.18. 200. T2.19. 300. T2.20. 400.

Тренировочная работа 3

T3.1. 0,5. T3.2. 0,6. T3.3. 0,7. T3.4. 0,8. T3.5. 5000. T3.6. 4000. T3.7. 4000.
T3.8. 9000. T3.9. 9000. T3.10. 10 000. T3.11. 0,9. T3.12. 1,2. T3.13. 0,3. T3.14. 1,5.
T3.15. 0,4. T3.16. 2,5.

Тренировочная работа 4

T4.1. 35. T4.2. 42. T4.3. 40. T4.4. 50. T4.5. 5. T4.6. 6. T4.7. 15. T4.8. 5.
T4.9. 4. T4.10. 8.

Тренировочная работа 5

T5.1. 6050. T5.2. 7200. T5.3. 4500. T5.4. 6250. T5.5. 180 000. T5.6. 240 000.
T5.7. 240 000. T5.8. 240 000. T5.9. 1,25. T5.10. 1,8.

Тренировочная работа 6

T6.1. 0,008. T6.2. 0,064. T6.3. 0,125. T6.4. 0,008. T6.5. 30. T6.6. 30. T6.7. 45.
T6.8. 8. T6.9. 2. T6.10. 0,5.

Тренировочная работа 7

T7.1. 30. T7.2. 40. T7.3. 9. T7.4. 2,25. T7.5. 3. T7.6. 2. T7.7. 5. T7.8. 30.
T7.9. 6. T7.10. 5.

Тренировочная работа 8

Т8.1. 30. **Т8.2.** 30. **Т8.3.** 30. **Т8.4.** 30. **Т8.5.** 60. **Т8.6.** 60. **Т8.7.** 60. **Т8.8.** 60.
Т8.9. 60. **Т8.10.** 60. **Т8.11.** 60. **Т8.12.** 60. **Т8.13.** 45. **Т8.14.** 45. **Т8.15.** 45.
Т8.16. 45. **Т8.17.** 60. **Т8.18.** 50. **Т8.19.** 30. **Т8.20.** 30.

Диагностическая работа 1

Д1.1. 50. **Д1.2.** 9. **Д1.3.** 0,2. **Д1.4.** 48. **Д1.5.** 12 500. **Д1.6.** 0,064. **Д1.7.** 37.
Д1.8. 30. **Д1.9.** 60. **Д1.10.** 45.

Диагностическая работа 2

Д2.1. 9. **Д2.2.** 4. **Д2.3.** 10 000. **Д2.4.** 8. **Д2.5.** 84 000. **Д2.6.** 2. **Д2.7.** 4,5.
Д2.8. 30 **Д2.9.** 60. **Д2.10.** 45.

Диагностическая работа 3

Д3.1. 25. **Д3.2.** 3,5. **Д3.3.** 12 000. **Д3.4.** 75. **Д3.5.** 84 000. **Д3.6.** 6. **Д3.7.** 3.
Д3.8. 30. **Д3.9.** 60. **Д3.10.** 45.

Содержание

| | |
|--|----|
| От редактора серии | 3 |
| Введение | 4 |
| Диагностическая работа | 9 |
| Задачи, приводящие к линейным уравнениям или неравенствам. | |
| Решение задачи 1 диагностической работы | 12 |
| Тренировочная работа 1 | 13 |
| Задачи, приводящие к квадратным уравнениям или неравенствам. | |
| Решение задачи 2 диагностической работы | 16 |
| Тренировочная работа 2 | 19 |
| Задачи, приводящие к степенным уравнениям или неравенствам. | |
| Решение задачи 3 диагностической работы | 25 |
| Тренировочная работа 3 | 27 |
| Задачи, приводящие к рациональным уравнениям или неравенствам. | |
| Решение задачи 4 диагностической работы | 33 |
| Тренировочная работа 4 | 35 |
| Задачи, приводящие к иррациональным уравнениям или неравенствам. | |
| Решение задачи 5 диагностической работы | 39 |
| Тренировочная работа 5 | 41 |
| Задачи, приводящие к показательным уравнениям или неравенствам. | |
| Решение задачи 6 диагностической работы | 44 |
| Тренировочная работа 6 | 46 |
| Задачи, приводящие к логарифмическим уравнениям или неравенствам. | |
| Решение задачи 7 диагностической работы | 49 |
| Тренировочная работа 7 | 52 |
| Задачи, приводящие к тригонометрическим уравнениям или неравенствам. | |
| Решения задач 8—10 диагностической работы | 56 |
| Тренировочная работа 8 | 60 |
| Диагностическая работа 1 | 65 |
| Диагностическая работа 2 | 68 |
| Диагностическая работа 3 | 71 |
| Ответы | 74 |

Учебно-методическое пособие

Дмитрий Дмитриевич Гуцин
Алексей Владимирович Малышев

ЕГЭ 2019. Математика. Задачи прикладного содержания.
Задача 10 (профильный уровень). Рабочая тетрадь

Под редакцией И. В. Яценко

Подписано в печать 07.08.2018 г. Формат 70 × 90 $\frac{1}{16}$. Бумага офсетная.

Печать офсетная. Печ. л. 5. Тираж 3000 экз. Заказ № .

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования.

119002, Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (499) 241–08–04.

arvato

BERTELSMANN

Отпечатано в полном соответствии с качеством предоставленного электронного оригинал-макета в ООО «Ярославский полиграфический комбинат».

150049, Ярославль, ул. Свободы, 97.

Книги издательства МЦНМО можно приобрести в магазине «Математическая книга»,
Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел. (495) 745–80–31. E-mail: biblio@mcsme.ru
